

**TOPOLOGISIERUNG PROJEKTIVER EBENEN
DURCH EPIMORPHISMEN**

PETER HARTMANN

*Diss
München
1986*



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554616_0034

**Topologisierung projektiver Ebenen
durch Epimorphismen**

**Dissertation der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München**

**von
Peter Hartmann**

eingereicht am 8.11.1985

1. Berichterstatter: Prof. Dr. S. Prieß
2. Berichterstatter: Prof. Dr. R. Fritsch

Tag der mündlichen Prüfung: 14.2.1986

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	3
1. Grundlagen	7
Projektive Ebenen	7
Epimorphismen projektiver Ebenen	11
Topologische projektive Ebenen	14
Bewertungen, Stellen und Bewertungstopologie	17
2. Die Stellentopologie projektiver Ebenen	22
Definition der Stellentopologie	22
Topologische Eigenschaften	28
Vergleich von Topologien projektiver Ebenen	33
3. Moufangebenen und desarguessche Ebenen	39
Stellen von Alternativkörpern	39
Die Stellentopologie von Alternativ- und Schiefkörpern	46
Die Stellentopologie von Moufangebenen und desarguesschen Ebenen	55
Eine Darstellung der Topologie durch zentrale Kollineationen	55
4. Angeordnete Ebenen mit ordnungsverträglichen Epimorphismen	60
Grundbegriffe	60
Die Stellentopologie zu einem o-Epimorphismus	65
Eine uniforme Struktur zur Stellentopologie	71

5. Verallgemeinerte Moulton Ebenen	75
Epimorphismen von Moulton Ebenen	75
Topologische Cartesische M-Gruppen	78
Ein Topologiefortsetzungssatz	82
Die Stellentopologie von Moulton Ebenen	94
 6. Kompakte unzusammenhängende Ebenen	 99
Kompakte Lenz-topologische Ebenen	99
Desarguessche kompakte Ebenen	110
Kompakte unzusammenhängende Ebenen über Cartesischen Gruppen	111
 7. Projektive Räume mit Homomorphismen	 119
Homomorphismen und VSL-Abbildungen projektiver Räume	119
Die durch Homomorphismen induzierte Topologie	122
Kompakte projektive Räume	126
 Literaturverzeichnis	 128
 Verzeichnis der wichtigsten Begriffe	 131
 Symbolverzeichnis	 132

Einleitung

Topologische projektive Ebenen sind projektive Ebenen, in denen auf Punkt- und Geradenraum Topologien gegeben sind, so daß das Schneiden verschiedener Geraden und das Verbinden verschiedener Punkte stetige Abbildungen sind. Die koordinatisierenden Ternärkörper sind dann topologische Ternärkörper. Topologische Ebenen werden seit den fünfziger Jahren intensiv untersucht. Dabei konzentrierte sich die Forschung bislang im wesentlichen auf lokalkompakte zusammenhängende Ebenen; über unzusammenhängende Ebenen ist noch wenig bekannt.

In der Körpertheorie sind wichtige Beispiele unzusammenhängender Topologien die Bewertungstopologien. Bewertungen lassen sich auch durch Stellen beschreiben, und der Begriff der Stelle läßt sich auf beliebige Ternärkörper erweitern. Diese Stellen bestimmen genau die Epimorphismen der zugehörigen projektiven Ebenen. Es stellt sich die Frage, ob Ebenen mit Epimorphismen sich derart topologisieren lassen, daß der Begriff der Bewertungstopologie in sinnvoller Weise verallgemeinert wird. Insbesondere sollen durch eine solche Topologisierung unzusammenhängende topologische Ebenen gefunden werden.

Eine positive Antwort auf diese Frage ist möglich, wenn der Begriff der topologischen Ebene etwas abgeschwächt wird. In Anlehnung an einen Ansatz von Lenz, der für topologische projektive Räume forderte, daß Zentralprojektionen stetig sein sollen, wird eine projektive Ebene Lenz-topologisch genannt, wenn auf Punkt- und Geradenraum Topologien gegeben sind, so daß Zentralprojektionen sowie Perspektivitäten zwischen Punktreihen und Geradenbüscheln stetig sind. Topologische Ebenen sind auch Lenz-topologisch; umgekehrt gibt es Beispiele hausdorffscher Lenz-topologischer Ebenen, die kei-

ne topologischen Ebenen sind. Ist jetzt ein nicht injektiver Epimorphismus λ der projektiven Ebene E gegeben, so läßt sich auf Punkt- und Geradenraum von E die gröbste Topologie beschreiben, in der Urbilder von Punkten (bzw. von Geraden) offen sind und bezüglich der E eine Lenz-topologische Ebene ist. Diese Topologie wird Stellentopologie genannt. Im zweiten Kapitel wird die Stellentopologie projektiver Ebenen definiert, und es werden deren topologische Eigenschaften hergeleitet: Ebenen mit Stellentopologie sind - genau wie bewertete Körper - total unzusammenhängende, vollständig reguläre Räume, Schneiden und Verbinden sind partiell stetige Abbildungen.

Im Falle der desarguesschen Ebenen, in denen der Epimorphismus durch eine normale Stelle induziert wird (d.h., es gibt eine zur Stelle gehörige Bewertung), zeigt sich, daß die Bewertungstopologie, die durch die Stelle definiert wird, mit der Stellentopologie übereinstimmt. Der Begriff der Stellentopologie erweitert also den Begriff der Bewertungstopologie. Die weitere Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, welche neuen Topologien auf projektiven Ebenen durch Epimorphismen gegeben werden. Insbesondere ist zu untersuchen, wann Ebenen mit Stellentopologie topologische projektive Ebenen sind, und ob die Topologie diskret werden kann.

Im 3. Kapitel werden Moufang Ebenen und desarguessche Ebenen betrachtet. Diese Ebenen sind in der Stellentopologie stets nicht diskrete topologische Ebenen. Insbesondere sind also auch Schiefkörper mit nicht normaler Stelle durch diese Stelle topologisierbar: ein unabhängig von der Geometrie interessantes Ergebnis.

Das 4. Kapitel behandelt angeordnete Ebenen mit ordnungsverträglichen Epimorphismen. Die Stellentopologie erweist sich hier als die Ordnungstopologie. Ein entsprechendes Re-

sultat kennt man aus der Theorie der bewerteten Körper: In angeordneten Körpern mit ordnungsverträglicher Bewertung stimmen Bewertungstopologie und Ordnungstopologie überein.

Untersucht man die Stellentopologie bei Ebenen über Cartesischen Gruppen, so bieten sich die Moultonebenen an, denn deren Epimorphismen sind vollständig bekannt. Das 5. Kapitel beschäftigt sich daher mit Moultonebenen. Auch Moultonebenen sind in der Stellentopologie immer topologische Ebenen, die Topologie läßt sich genau beschreiben: Eingeschränkt auf einen geeigneten Koordinatenkörper ist sie das Supremum von Ordnungstopologie und Stellentopologie des dem Ternärkörper zugrundeliegenden Schiefkörper.

Im 6. Kapitel werden zunächst kompakte Lenz-topologische Ebenen untersucht und Kriterien dafür hergeleitet, wann eine solche Ebene E schon eine topologische Ebene ist. Hierfür ist (unter einer Zusatzvoraussetzung für die Ebenen der Klasse IVa_1) hinreichend, daß E eine Translationsebene ist. Anschließend werden Ebenen betrachtet, die in der Stellentopologie kompakt sind. Da alle lokalkompakten unzusammenhängenden Schiefkörper bekannt sind, läßt sich folgern, daß jede kompakte unzusammenhängende desarguessche Ebene eine Ebene mit Stellentopologie ist. Moultonebenen können dagegen in der Stellentopologie nicht einmal lokalkompakt sein. Am Ende des 6. Kapitels wird ein Beispiel einer Ebene über einer echten Cartesischen Gruppe gebracht, die in der Stellentopologie eine kompakte topologische Ebene wird.

Der gewählte Ansatz für die Stellentopologie legt es nahe, auch Homomorphismen projektiver Räume höherer Dimension zu untersuchen. Dies geschieht im letzten Kapitel. Bei Zugrundelegung des Homomorphiebegriffs von Machala zeigt sich, daß Homomorphismen solcher Räume in jedem Fall eine nicht diskrete Topologie liefern, die den Urbildraum zu einem topologischen Raum im Sinne von Lenz macht. Insbesondere wird

die Topologie jedes kompakten unzusammenhängenden desargueschen projektiven Raumes stets durch einen Epimorphismus induziert.

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei Frau Professor Prieß für die Anregung zu dieser Arbeit, ihr Interesse und viele fruchtbare Diskussionen bedanken. Mein Dank gilt auch allen, die mir durch Gespräche und wertvolle Anregungen geholfen haben, insbesondere Herrn Professor Fritsch, Herrn Grundhöfer und Herrn Professor Salzmann.

1. Grundlagen

In diesem ersten Kapitel werden im wesentlichen ohne Beweise die in der weiteren Arbeit benötigten Grundlagen über projektive Ebenen, topologische Ebenen, Bewertungen, Stellen und Epimorphismen projektiver Ebenen zusammengestellt. Zur Definition der algebraischen und geometrischen Begriffe sei auf Prieß-Crampe [22] und Pickert [21] verwiesen. Auch die Bezeichnungsweise orientiert sich weitgehend an diesen Quellen. Die in der Arbeit auftretenden Begriffe aus der Topologie werden verwendet wie bei Bourbaki [6] definiert.

Projektive Ebenen

Definition 1.1. Eine *projektive Ebene* $E = (P, G, I)$ besteht aus einer Menge P von Punkten, einer Menge G von Geraden und einer Inzidenzrelation I zwischen Punkten und Geraden, so daß gilt:

1. Je zwei verschiedene Punkte sind mit genau einer Geraden inzident.
2. Je zwei verschiedene Geraden sind mit genau einem Punkt inzident.
3. Es gibt vier Punkte, von denen keine drei mit einer Geraden inzident sind.

Die Elemente von P werden mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet, die von G mit kleinen lateinischen Buchstaben. Ist $P \in P$, $g \in G$ und P inzident g , so schreibt man PIg oder gIP . $P \nmid g$ heißt "P nicht inzident g". Ist $P \neq Q$ und PIg , QIg , so wird g mit PQ bezeichnet und heißt *Verbindungsgerade* von P und Q . Ist $g \neq h$ und gIP , hIP , so wird P mit $g \wedge h$ bezeichnet und heißt *Schnittpunkt* von g und h . Für PIg sagt man

$$P = (x_P, y_P) \text{ mit } x_P = PV \cap OE, y_P = PU \cap OE.$$

Die von V verschiedenen Punkte P der Geraden UV erhalten Koordinaten wie folgt:

$$P = (z) \text{ mit } z = (PO \cap VE) \cup OE.$$

Der Punkt V wird mit (∞) bezeichnet. Die Verbindungsgerade der Punkte (r) und $(0, s)$, $r, s \in K$ wird mit $[r, s]$, die Gerade durch (∞) und (x, x) mit $[x]$ und UV mit $[\infty]$ bezeichnet (Abb. 1.1.).

Auf K läßt sich jetzt eine Ternäroperation T einführen durch die Festsetzung:

$$y = T(r, x, s) \iff (x, y) \in [r, s].$$

(K, T) ist ein Ternärkörper im Sinne der

Definition 1.2. Eine Menge K, die mindestens zwei Elemente 0 und 1 enthält, und auf der eine Ternäroperation T erklärt ist, welche die folgenden Bedingungen (T1) bis (T5) erfüllt, heißt *Ternärkörper*.

(T1) Zu $a_1, a_2, b_1, b_2 \in K$ gibt es im Falle $a_1 \neq a_2$ genau ein $x \in K$ mit $T(a_1, x, b_1) = T(a_2, x, b_2)$.

(T2) Zu $x, y, a \in K$ gibt es genau ein $b \in K$ mit $y = T(a, x, b)$.

(T3) Zu $x_i, y_i \in K$, $i = 1, 2$ mit $x_1 \neq x_2$ gibt es $a, b \in K$ mit $y_i = T(a, x_i, b)$, $i = 1, 2$.

(T4) $b = T(0, x, b) = T(a, 0, b)$.

(T5) $a = T(a, 1, 0) = T(1, a, 0)$.

Das x aus (T1) wird mit $T_1(a_1, a_2, b_1, b_2)$ bezeichnet, b aus (T2) mit $T_2(x, y, a)$ und das (eindeutig bestimmte) a aus (T3) mit $T_3(x_1, x_2, y_1, y_2)$.

Die Koordinatenmenge einer projektiven Ebene ist also ein Ternärkörper; umgekehrt bestimmt jeder Ternärkörper K eine projektive Ebene. Auf dem Ternärkörper K wird durch die Festsetzung

$$a+b = T(1,a,b), \quad a \cdot b = T(a,b,0)$$

eine additive und eine multiplikative Struktur erklärt. $(K,+)$ und $(K^*,\cdot) = (K \setminus \{0\},\cdot)$ bilden die *additive* und die *multiplikative Loop* von K . In $(K,+)$ werde mit $(a-b)$ das Element bezeichnet, für das $(a-b)+b = a$ ist, mit $(-b+a)$ das Element mit $b+(-b+a) = a$. In $(K^*,\cdot)$ sei $a \backslash b$ das Element mit $a \cdot (a \backslash b) = b$ und b/a das Element, für das gilt: $(b/a) \cdot a = a$.

Ein Ternärkörper heißt *Cartesische Gruppe*, wenn $(K,+)$ eine Gruppe ist, und wenn $T(a,x,b) = ax+b$ für alle $a,x,b \in K$ gilt. Eine Cartesische Gruppe heißt *(Rechts-)Quasikörper*, wenn für alle $a,b,c \in K$ gilt: $a(b+c) = ab+ac$. Ein *Fastkörper* ist ein assoziativer Quasikörper, ein *distributiver Quasikörper* ist ein Quasikörper, in dem auch noch das zweite Distributivgesetz gilt. Ein distributiver Quasikörper, in dem für alle a,b gilt: $a(ab) = (aa)b$, $b(aa) = (ba)a$ heißt *Alternativkörper*.

Zunehmend bessere algebraische Eigenschaften der Ternärkörper haben die Gültigkeit von immer mehr Schließungssätzen in den zugehörigen projektiven Ebenen zur Folge. Siehe hierzu die Lenz-Barlotti Klassifizierung projektiver Ebenen, z.B. bei Pickert [21], S.334ff.; vgl. auch die Tabelle in Prieß-Crampe [22], S.262.

Epimorphismen projektiver Ebenen

Die Ergebnisse dieses Abschnittes sind aus Prieß-Crampe [22], Kapitel V, § 4 entnommen. Dort sind auch die Beweise zu finden.

Definition 1.3. Es seien $E = (P, G, I)$ und $E' = (P', G', I')$ projektive Ebenen. Ein Paar von Abbildungen

$$\lambda_1 : P \longrightarrow P', \quad \lambda_2 : G \longrightarrow G'$$

heißt *Homomorphismus* von E nach E' , wenn für alle $P \in P$, $g \in G$ gilt:

$$PIg \Rightarrow P^{\lambda_1} I' g^{\lambda_2}.$$

Im folgenden werden die Abbildungen λ_1, λ_2 beide mit λ bezeichnet; für den Homomorphismus wird kurz $\lambda : E \rightarrow E'$ geschrieben. Sind λ_1, λ_2 surjektiv, so heißt λ *Epimorphismus*, sind λ_1, λ_2 bijektiv, so heißt λ *Isomorphismus*. Bei der Untersuchung nicht injektiver Epimorphismen kann man sich auf unendliche Ebenen beschränken, denn es gilt der

Satz 1.4. Sei $\lambda : E \rightarrow E'$ ein nicht injektiver Epimorphismus. Dann gibt es zu jedem Punkt $P \in P$ und zu jeder Geraden $g \in G$ mit PIg unendlich viele Punkte QIg mit $Q^\lambda = P^\lambda$. $\square$

Jeder Epimorphismus einer endlichen Ebene ist also bereits ein Isomorphismus. Im folgenden werden alle Epimorphismen als nicht injektiv vorausgesetzt. Auch dann liegen auf jeder Geraden mindestens drei Punkte mit paarweise verschiedenen Bildern, denn sonst wäre das Bild der Ebene keine projektive Ebene mehr.

Sei $\lambda : E \rightarrow E'$ ein Epimorphismus, O', E', U', V' bilde ein echtes Viereck im Bild, und O, E, U, V seien Urbilder zu diesen Punkten. Dann bilden auch diese ein echtes Viereck. Seien K und K' die zugehörigen Ternärkörper und sei $\infty = OE \wedge UV$. Die Abbildung $\lambda|K : K \rightarrow K' \cup \{\infty\}$ heißt *Stelle* des Ternärkörpers K . Stellen von Ternärkörpern lassen sich algebraisch charakterisieren: Sind K, K' Ternärkörper, so ist eine surjektive Abbildung $\lambda : K \rightarrow K' \cup \{\infty\}$ genau dann eine Stelle, wenn sie die Bedingungen (S1) bis (S8) des Satzes 1 in Prieß-Crampe [22], S.242f. erfüllt. Eine wichtige Rolle werden im folgenden Ternärkörper mit weiteren algebraischen Eigenschaften spielen. Definiert man für $a \in K'$ noch $\infty + a = a + \infty = \infty$ und wird für $a \neq 0$ gesetzt: $a\infty = \infty a = \infty$ sowie $\infty\infty = \infty$, so vereinfachen sich die Bedingungen (S1) bis (S8) wie die beiden folgenden Sätze von André [3] zeigen.

Satz 1.5. *Es seien K und K' Cartesische Gruppen. Eine surjektive Abbildung $\lambda : K \rightarrow K' \cup \{\infty\}$ ist genau dann eine Stelle von K , wenn für sie die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- (S1') $0^\lambda = 0, 1^\lambda = 1.$
- (S2') $a^\lambda, b^\lambda \neq \infty \Rightarrow (a+b)^\lambda = a^\lambda + b^\lambda, (ab)^\lambda = a^\lambda b^\lambda.$
- (S3') $a^\lambda \neq \infty, b^\lambda = \infty \Rightarrow (a+b)^\lambda = (b+a)^\lambda = \infty.$
- (S4') $a^\lambda \neq 0, b^\lambda = \infty \Rightarrow (ab)^\lambda = (ba)^\lambda = \infty.$
- (S5') $(-ax + a_0x)^\lambda \neq \infty, x^\lambda = \infty \Rightarrow a^\lambda = a_0^\lambda.$
- (S6') $(ax - ax_0)^\lambda \neq \infty, a^\lambda = \infty \Rightarrow x^\lambda = x_0^\lambda.$
- (S7') $a_0x + ax_0 = ax, a^\lambda = x^\lambda = (a_0x)^\lambda = (ax_0)^\lambda = \infty$
 $\Rightarrow a_0^\lambda = \infty$ oder $x_0^\lambda = \infty.$

□

Satz 1.6. *Es seien K und K' Schiefkörper. Eine surjektive Abbildung $\lambda : K \rightarrow K' \cup \{\infty\}$ ist genau dann eine Stelle von K , wenn λ die Bedingungen (S1') bis (S4') aus Satz 1.5. erfüllt.* □

Später (Satz 3.2.) wird gezeigt, daß Satz 1.6. auch noch für Alternativkörper richtig ist. Durch eine Stelle des Ternärkörpers K

wird genau ein Epimorphismus der durch K koordinatisierten Ebene bestimmt. Siehe auch hierzu Prieß-Crampe [22], S.242, Satz 1.

Satz 1.7. Sei $\lambda : E \rightarrow E'$ ein Epimorphismus projektiver Ebenen, $P \in P$, $g \in G$. Eine zentrale Kollineation σ von E mit Zentrum Z und Achse g ((Z, g) -Kollineation) induziert in E' genau dann eine (Z^λ, g^λ) -Kollineation τ , wenn es in E einen Punkt P gibt mit $P^\lambda, P^{\sigma\lambda} \in Z^\lambda$ und $P^\lambda, P^{\sigma\lambda} \notin g^\lambda$. Für $Q' \in P'$ mit $Q' = Q^\lambda$ ist dann $Q'^\tau = Q^{\sigma\lambda}$. □

Definition 1.8. Sei E eine projektive Ebene, $P \in P$, $g, h \in G$, $P \notin g, h$. Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \rho : g &\longrightarrow \overset{*}{P} & \sigma : g &\longrightarrow h \\ X &\longmapsto XP & X &\longmapsto X P \cap h \end{aligned}$$

und die hierzu dualen Abbildungen heißen *Perspektivitäten*. Eine Hintereinanderausführung von Perspektivitäten heißt *Projektivität*.

Eine einfache Überlegung zeigt:

Lemma 1.9. Eine Perspektivität ρ von der Geraden g auf das Büschel $\overset{*}{P}$ induziert genau dann eine Perspektivität im Bild unter dem Epimorphismus λ , wenn $P^\lambda \notin g^\lambda$ ist. Insbesondere gilt in diesem Fall für $X, Y \in g$: $X^\lambda = Y^\lambda \iff X^{\rho\lambda} = Y^{\rho\lambda}$. Ebenso gilt die duale Aussage. □

Topologische projektive Ebenen

Im folgenden werde für den topologischen Raum X mit $U(x)$ der Umgebungsfiler des Punktes $x \in X$ bezeichnet. Eine projektive Ebene $E = (P, G, I)$ heißt *topologische projektive Ebene*, wenn auf P und G Topologien erklärt sind, so daß die Operationen Schneiden und Verbinden auf ihrem Definitionsbereich stetig sind. Auf den Geraden - aufgefaßt als Punktreihen - und auf den Büscheln betrachtet man die induzierte Topologie. Es wird immer vorausgesetzt, daß es in P eine echte offene Teilmenge gibt. Offenbar sind in topologischen Ebenen Projektivitäten Homöomorphismen. Ebenso ist für $P \in P$, $g \in G$, $P \ni g$ die Zentralprojektion $\pi: P \setminus P \rightarrow g$, $X \mapsto X \cap g$ stetig. Im folgenden Satz werden einige Eigenschaften topologischer Ebenen zusammengestellt. Die Beweise hierzu findet man in Salzmann [28].

Satz 1.10. *Sei $E = (P, G, I)$ eine topologische projektive Ebene. Dann gilt für die Topologie des Punktraumes P :*

1. *Je zwei Geraden sind (als Punktreihen) homöomorph.*
2. *P ist hausdorffsch, Punkte sind abgeschlossen.*
3. *Geraden sind abgeschlossen.*
4. *P ist regulär.¹⁾*
5. *P ist entweder zusammenhängend oder total unzusammenhängend.²⁾*
6. *Der Punktraum jeder affinen Ebene ist homöomorph zum Produkt zweier affiner Geraden.*

Ebenso ist die Dualisierung dieser Aussagen richtig. □

¹⁾ Bourbaki [6], I, §8, N°4.

²⁾ Bourbaki [6], I, §11, N°1 und N°5.

Ein Ternärkörper (K, T) mit einer Topologie T heißt *topologischer Ternärkörper*, wenn T und die Umkehroperationen T_1, T_2, T_3 aus Definition 1.2. in allen Variablen stetig sind. Eine Cartesische Gruppe (Quasikörper...) heißt *topologische Cartesische Gruppe (topologischer Quasikörper...)*, wenn sie ein topologischer Ternärkörper ist. Jeder Ternärkörper einer topologischen Ebene ist ein topologischer Ternärkörper. Die Frage, ob jeder topologische Ternärkörper eine topologische projektive Ebene bestimmt, ist noch offen. Es gilt jedoch:

Satz 1.11. (Salzmann [27], S.461) *Zu einem topologischen Alternativkörper gibt es bis auf Isomorphie genau eine topologische projektive Ebene, die den Alternativkörper zum Ternärkörper hat und in ihm die gegebene Topologie induziert.* □

In der weiteren Arbeit treten Ebenen mit Topologien auf, so daß Zentralprojektionen stetig sind, über die Stetigkeit von Schneiden und Verbinden jedoch im allgemeinen keine Aussage möglich ist. Ebenen mit solchen Topologien fallen unter den Begriff des topologischen projektiven Raumes, wie er von Lenz [15], S.343 definiert worden ist.

Definition 1.12. Ein projektiver Raum P der Dimension $n^1)$ heißt *topologischer projektiver Raum*, wenn der Punktraum eine Topologie trägt, so daß gilt:

1. Jede Zentralprojektion aus einem Punkt P auf eine Hyperebene H mit $P \notin H$ ist eine stetige Abbildung von $P \setminus P$ nach H .
2. Es gibt eine nicht leere echte offene Teilmenge von P .

¹⁾ Zu projektiven Räumen und damit zusammenhängenden Begriffen siehe ebenfalls Lenz [15].

In dem n -dimensionalen affinen Teilraum A des projektiven Raumes P der Dimension n sei ein Koordinatensystem gewählt, die affinen Geraden $g_1, \dots, g_n$ seien die Koordinatenachsen. Es ist also $A = g_1 \times \dots \times g_n$. Ist P ein topologischer Raum, so werde die von P auf A induzierte Topologie mit T und die Produkttopologie auf A bezüglich der auf $g_1, \dots, g_n$ induzierten Topologien mit T' bezeichnet. Es gilt der

Satz 1.13. (Lenz [15], S.346, 3.5. und 4.1.) *Die Topologie T ist feiner¹⁾ als die Topologie T' . Ist der Raum P kompakt, so stimmen T und T' überein.*

In [15] werden nur desarguessche projektive Räume betrachtet. Im Beweis dieses Satzes wird davon aber kein Gebrauch gemacht, er gilt also auch für projektive Ebenen. □

Die Definition eines topologischen projektiven Raumes soll für den Fall der Dimension 2, also für projektive Ebenen noch etwas verschärft werden.

Definition 1.14. Sei $E = (P, G, I)$ eine projektive Ebene; es sei $T = (T_P, T_G)$ ein Paar von Topologien auf P und G , so daß E und die zu E duale Ebene projektive Räume im Sinne von Lenz sind (vgl. 1.12.), und so, daß Perspektivitäten zwischen Punktreihen und Geradenbüscheln stetig sind. Dann heiße (E, T) *Lenz-topologische Ebene*.

Die Bezeichnung Lenz-topologische Ebene wird in Anlehnung an den Ansatz von Lenz für projektive Räume verwendet, um diese Ebenen von den topologischen projektiven Ebenen zu unterscheiden.

¹⁾ Die Begriffe "feiner" und "gröber" sollen immer auch die Gleichheit der Topologien zulassen.

Topologische Ebenen sind Lenz-topologische Ebenen. Andererseits gibt es hausdorffsche Lenz-topologische Ebenen, die keine topologischen Ebenen sind: Bei Heise und Sörensen [12] ist ein Beispiel eines dreidimensionalen hausdorffschen projektiven Raumes über $\mathbb{R}$ zu finden, in dem die Topologie des affinen Raumes echt feiner als die Produkttopologie affiner Geraden ist. Dieses Beispiel läßt sich auf pappossche projektive Ebenen übertragen. Man erhält so Lenz-topologische Ebenen, die nach 1.10.6. keine topologischen Ebenen sein können. Damit ist auch die bei Pickert [21], S.263 aufgeworfene Frage, ob die Stetigkeit von Perspektivitäten ausreicht, um eine Ebene zu einer topologischen Ebene zu machen, negativ beantwortet.

Bewertungen, Stellen und Bewertungstopologie

Hier und im folgenden wird für Körper (bzw. für Ternärkörper) K mit K^* die multiplikative Gruppe (bzw. Loop) $K \setminus \{0\}$ bezeichnet.

Definition 1.15. Sei K ein Schiefkörper, $(\Gamma, \cdot)$ eine angeordnete Gruppe. Eine surjektive Abbildung $v : K \rightarrow \Gamma \cup \{0\}$ heißt *Bewertung* von K , wenn gilt:

1. $v(a) = 0 \iff a = 0$.
2. $v(ab) = v(a)v(b)$.
3. $v(a+b) \leq \max\{v(a), v(b)\}$.

Dabei sei $0 < \gamma$, $0\gamma = \gamma 0 = 0$ für alle $\gamma \in \Gamma$. (K, v) heißt *bewerteter Körper*, Γ heißt *Wertegruppe* der Bewertung v .

Das neutrale Element der Wertegruppe Γ wird mit ε bezeichnet. Zwei Bewertungen v, w des Schiefkörpers K mit Wertegruppen

Γ, Δ heißen *äquivalent*, wenn es einen ordnungserhaltenden Isomorphismus $\phi: \Gamma \rightarrow \Delta$ gibt, so daß $\phi \circ v = w$ ist.

Definition 1.16. Ein Ring A mit 1-Element in dem Schiefkörper K heißt *Bewertungsring*, wenn für alle $a \in K$ gilt: $a \notin A \Rightarrow a^{-1} \in A$. Seien K, K' Schiefkörper. In $K' \cup \{\infty\}$ werde für $k \in K'$ gesetzt: $k \pm \infty = \infty$, für $k \neq 0$ sei $k \cdot \infty = \infty \cdot k = \infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty^{-1} = 0$, $0^{-1} = \infty$. Eine Abbildung $\lambda: K \rightarrow K' \cup \{\infty\}$ heißt *Stelle* des Schiefkörpers K , wenn sie sich homomorph verhält, sofern Summen und Produkte der Bilder definiert sind.

Wird der Schiefkörper K als Ternärkörper einer desarguesschen projektiven Ebene aufgefaßt, so fallen die Begriffe "Stelle eines Ternärkörpers" und "surjektive Stelle eines Schiefkörpers" zusammen. Zwei Stellen λ, μ von K nach K_λ, K_μ heißen *äquivalent*, wenn es einen Isomorphismus $\phi: K_\lambda \cup \{\infty\} \rightarrow K_\mu \cup \{\infty\}$ gibt, mit $\phi(\infty) = \infty$ und $\phi \circ \lambda = \mu$. Der Zusammenhang zwischen Bewertungen und Stellen wird durch den folgenden Satz beschrieben:

Satz 1.17. Ist v eine Bewertung des Schiefkörpers K , so ist $A_v = \{x \in K: v(x) \leq \epsilon\}$ ein Bewertungsring mit maximalem Ideal $M_v = \{x \in K: v(x) < \epsilon\}$ und

$$\begin{aligned} \lambda: K &\longrightarrow A_v/M_v \\ k &\longmapsto \begin{cases} k + M_v & \text{falls } k \in A_v \\ \infty & \text{falls } k \notin A_v \end{cases} \end{aligned}$$

eine Stelle von K , so daß für alle $a, b \in K$ gilt: $\lambda(ab) = 0 \iff \lambda(ba) = 0$. λ heißt *kanonische Stelle* zu v .

Ist $\mu: K \rightarrow K' \cup \{\infty\}$ eine Stelle, und gilt für alle $a, b \in K$ $\mu(ab) = 0 \iff \mu(ba) = 0$, dann ist für $U = \mu^{-1}(K'^*)$ die Menge $\Delta = K^*/U$ eine angeordnete multiplikative Gruppe mit $aU < bU \iff \mu(b^{-1}a) = 0$, und es ist

$$\begin{aligned} w : K &\longrightarrow \Delta_U\{0\} \\ k &\longrightarrow kU, \quad k \neq 0 \\ 0 &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

eine Bewertung von K . w heißt kanonische Bewertung zu μ . Es ist λ äquivalent zu μ genau dann, wenn v äquivalent zu w ist. $\square$

Zum Beweis dieses Satzes siehe z.B. Prieß-Crampe [22], S.40, Satz 4 und Satz 5 und für den nicht kommutativen Fall Schilling [29], S.13f. Dabei ist zu beachten, daß die dortige Bedingung $\lambda(d^{-1}ad) \neq \infty \iff \lambda(a) \neq \infty$ für $d \neq 0$ mit der obigen Bedingung $\lambda(ab) = 0 \iff \lambda(ba) = 0$ äquivalent ist.

In Schiefkörpern wird die soeben angeführte Äquivalenz falsch, wenn man auf diese zusätzliche Bedingung verzichtet. Dies zeigt ein Beispiel in Radó [24]. Zu jeder Bewertung existiert zwar eine kanonische Stelle, es gibt aber Stellen, zu denen keine kanonische Bewertung existiert. In der Bewertungstheorie wird daher für Stellen von Schiefkörpern häufig zusätzlich gefordert: $\lambda(ab) = 0 \iff \lambda(ba) = 0$. Stellen mit dieser Eigenschaft heißen hier *normale Stellen*.

Sei (K, v) ein bewerteter Schiefkörper. Es sei für $\gamma \in \Gamma$ und für $x \in K$:

$$V_\gamma(x) = \{\zeta \in K : v(\zeta - x) < \gamma\}.$$

Satz 1.18. Es sei (K, v) ein bewerteter Schiefkörper mit Wertegruppe Γ . Durch die Mengen $V_\gamma(x)$, $\gamma \in \Gamma$ als Basis eines Umgebungsfilters von $x \in K$ wird auf K eine Topologie erklärt, bezüglich der K ein topologischer Schiefkörper ist. Äquivalente Bewertungen bestimmen die gleiche Topologie. $\{V_\gamma(x)\}$ ist eine Umgebungsbasis offener Mengen. $\square$

Diese Topologie von K heißt *Bewertungstopologie*.

Radó [24] und Mathiak [17] verallgemeinern das Konzept der Bewertung auf Schiefkörpern so, daß die Äquivalenz aus Satz 1.17. auch für nicht normale Stellen wieder hergestellt wird. Definiert man mit Hilfe einer solchen verallgemeinerten Bewertung eine Topologie wie in 1.18., so erhält man dadurch im allgemeinen keine Körpertopologie. Ein Beispiel hierzu ist bei Mathiak [18] zu finden.

Ist $\lambda : K \rightarrow K' \cup \{\infty\}$ eine normale Stelle des Schiefkörpers K , so gehört zu λ eine Äquivalenzklasse von Bewertungen und also eine Bewertungstopologie. Diese läßt sich auch alleine über die Stelle beschreiben.

Lemma 1.19. *Sei $\lambda : K \rightarrow K' \cup \{\infty\}$ eine normale Stelle des Schiefkörpers K . Für $a, x \in K$ sei*

$$U_a(x) = \{\zeta \in K : \lambda(a(\zeta - x)) = 0\}.$$

Die Mengen $U_a(x)$, $a \in K$ sind Basis eines Filters $U(x)$. Durch $U(x)$ als Umgebungssystem von x wird auf K eine Topologie T_λ gegeben, bezüglich der K ein topologischer Schiefkörper ist. T_λ ist die Bewertungstopologie der zu λ gehörigen kanonischen Bewertung v .

Beweis.

Sei $a \in K^*$ und $v(a) = \gamma = aU$. Dann ist

$$V_\gamma(0) = \{\zeta : v(\zeta) < v(a)\} = \{\zeta : \lambda(a^{-1}\zeta) = 0\} = U_{a^{-1}}(0),$$

und für $a = 0$ gilt:

$$V_\varepsilon(0) = U_1(0) \subset U_a(0) = K.$$

Da v surjektiv ist, erzeugen also die Mengen $V_\gamma(0)$, $\gamma \in \Gamma$ und $U_a(0)$, $a \in K$ denselben Filter. Wegen

$$V_\gamma(x) = V_\gamma(0) + x \text{ und } U_a(x) = U_a(0) + x$$

folgt daraus die Behauptung. □

Um Topologien auf nicht papposschen projektiven Ebenen mit Epimorphismen zu finden, soll der Begriff der Bewertungstopologie zunächst möglichst unabhängig von der algebraischen Struktur des Körpers gefaßt werden.

Satz 1.20. Sei $\lambda : K \rightarrow K' \cup \{\infty\}$ eine normale Stelle des Schiefkörpers K , sei T_λ die dazugehörige Bewertungstopologie. T_λ ist die gröbste Topologie auf K , in der $\lambda^{-1}(\{k\})$ offen ist für alle $k \in K' \cup \{\infty\}$ und in der K ein topologischer Schiefkörper ist.

Beweis.

Urbilder von Elementen sind offen: Sei $k \in K' \cup \{\infty\}$, $x \in \lambda^{-1}(\{k\})$. Es ist

$$U_1(x) = \{\zeta : \lambda(\zeta - x) = 0\} \subset \{\zeta : \lambda(x) = \lambda(\zeta)\} = \lambda^{-1}(\{k\}),$$

also ist $\lambda^{-1}(\{k\})$ offen für alle $k \in K' \cup \{\infty\}$.

Sei T eine weitere Topologie mit dieser Eigenschaft und sei (K, T) ein topologischer Körper. Weil die Umgebungen des Punktes x durch die Translation $\zeta \mapsto \zeta + x$ aus den Umgebungen der Null gewonnen werden können, genügt es, die Umgebungssysteme der Null zu vergleichen. Jede T_λ -Umgebung ist auch eine T -Umgebung, denn für $a \neq 0$ ist $U_a(0) = a^{-1} \cdot U_1(0) = a^{-1} \cdot \lambda^{-1}(\{0\})$ und $a^{-1} \cdot \lambda^{-1}(\{0\})$ ist eine T -Umgebung, da die Multiplikation mit einem Element $a \neq 0$ ein Homöomorphismus ist. Also ist T feiner als T_λ . □

Im Beweis von 1.20. wird nur die partielle Stetigkeit der Addition und der Multiplikation verwendet. Es gilt also sogar:

Satz 1.21. Sei K ein Schiefkörper und sei $\lambda : K \rightarrow K' \cup \{\infty\}$ eine normale Stelle. Die Bewertungstopologie von K ist die gröbste Topologie auf K , in der Urbilder bezüglich λ von Elementen offen sind und Addition und Multiplikation partiell stetig sind. □

2. Die Stellentopologie projektiver Ebenen

In diesem Kapitel soll für beliebige projektive Ebenen mit Epimorphismus eine Topologie gesucht werden, die im Fall desarguesscher Ebenen auf den Ternärkörpern die Bewertungstopologie induziert. Die letzten beiden Ergebnisse des ersten Kapitels liefern die Idee für diese Konstruktion. Gesucht wird eine Topologie, in der - eingeschränkt auf einen Ternärkörper - Urbilder von Punkten offen und die Ternärkörperoperationen partiell stetig sind. Als geeignet erweist sich hierfür die größte Topologie, in der Urbilder von Punkten offen und Zentralprojektionen stetig sind. Diese Topologie existiert, und zusammen mit der dualen Topologie auf dem Geradenraum wird die Ebene so zu einer Lenz-topologischen Ebene.

Definition der Stellentopologie

Ist (E, λ) eine projektive Ebene mit Epimorphismus, so kann man direkt die Existenz einer größten Topologie zeigen, in der Urbilder von Punkten offen und Zentralprojektionen stetig sind. Um jedoch topologische Eigenschaften herleiten zu können, und um zu zeigen, daß die Ebene eine Lenz-topologische Ebene ist, muß diese Topologie explizit beschrieben werden. Das geschieht in diesem Abschnitt.

Die Menge der Projektivitäten einer Geraden g auf sich bildet eine Gruppe, diese wird mit $\Gamma_0(g)$ bezeichnet. Die Menge der Projektivitäten von g auf ein beliebiges Büschel sei $\Gamma_1(g)$ und die Menge aller Projektivitäten von g sei $\Gamma_2(g)$ (oder $\Gamma(g)$). Analog werden für Projektivitäten des Büschels $\overset{*}{P}$ die Mengen $\Gamma_0(P)$, $\Gamma_1(P)$, $\Gamma_2(P) = \Gamma(P)$ erklärt. Zunächst soll nun

auf den Punktreihen der Ebene E eine Topologie erklärt werden.

Definition 2.1. Sei $\lambda : E \rightarrow E'$ ein nicht injektiver Epimorphismus projektiver Ebenen. Für $P \in P$, $g \in G$, $P \in G$, $\sigma \in \Gamma(g)$, $\tau \in \Gamma(P)$ wird gesetzt:

$$V_{\sigma}^g = \{(Q, R) \in g \times g : Q^{\sigma\lambda} = R^{\sigma\lambda}\}; \quad V_{\sigma}^g(P) = \{Q : (P, Q) \in V_{\sigma}^g\};$$

$$V_{\tau}^P = \{(h, l) \in P \times P : h^{\tau\lambda} = l^{\tau\lambda}\}; \quad V_{\tau}^P(g) = \{h : (g, h) \in V_{\tau}^P\}.$$

Für V_{σ}^g ($V_{\tau}^P \dots$) wird nur V_{σ} ($V_{\tau} \dots$) geschrieben, wenn keine Verwechslung möglich ist.

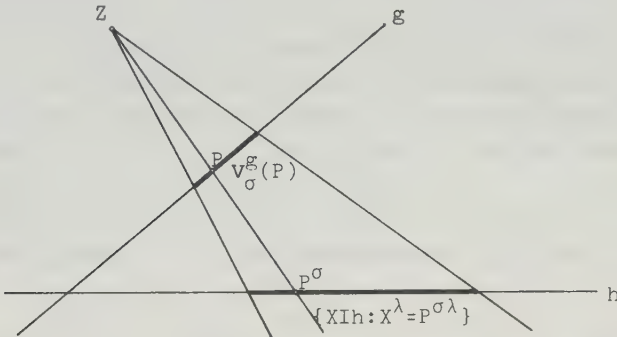


Abb. 2.1.

Lemma 2.2. In den Bezeichnungen der Definition 2.1. bilden die Mengen V_{σ} , $\sigma \in \Gamma_i(g)$ für $i = 0, 1, 2$ Subbasen derselben uniformen Struktur¹⁾ U_g auf g . Die Mengen $V_{\sigma}(P)$, $\sigma \in \Gamma_i(g)$ bilden für $i = 0, 1, 2$ Subbasen offener Umgebungen von P . Dual werden die Büschel der Ebene E zu uniformen Räumen.

Beweis.

Da für alle Teilmengen V_1, V_2, W_1, W_2 eines Raumes $X \times X$ gilt:

¹⁾ Bourbaki [6], II, §1. Eine Menge von Elementen einer uniformen Struktur heißt Subbasis, wenn endliche Durchschnitte eine Basis bilden.

$(V_1 \cap V_2)^{-1} = V_1^{-1} \cap V_2^{-1}$ und weil aus $W_1^2 \subset V_1$, $W_2^2 \subset V_2$ stets $(W_1 \cap W_2)^2 \subset V_1 \cap V_2$ folgt, bildet eine Filtersubbasis auf $X \times X$, welche den Bedingungen (UI') bis (UIII') aus Bourbaki [6], II, §1 genügt, eine Subbasis einer uniformen Struktur. Dies ist also für die Mengen V_σ^g nachzurechnen. In jeder Subbasismenge liegt die Diagonale und die Mengen sind symmetrisch, also sind (UI') und (UIII') erfüllt. Weiter folgt aus $(P, Q) \in V_\sigma$ und $(Q, R) \in V_\sigma$ auch $(P, R) \in V_\sigma$ und damit $(V_\sigma)^2 \subset V_\sigma$.

Zu zeigen bleibt noch, daß es zu jedem $\gamma \in \Gamma_2(g)$ ein $\sigma \in \Gamma_1(g)$ und ein $\tau \in \Gamma_0(g)$ gibt mit $V_\sigma \subset V_\gamma$ und $V_\tau \subset V_\gamma$. Sei dazu $\gamma \in \Gamma_2(g)$, $\gamma: g \rightarrow A$, A ein Büschel oder eine Gerade. Sei $Z \in P$ so gewählt, und $\pi: A \rightarrow \mathbb{Z}^*$ eine Projektivität, so daß für alle $P, Q \in g$ gilt:

$$P\gamma\lambda = Q\gamma\lambda \iff P\gamma\pi\lambda = Q\gamma\pi\lambda.$$

(Dies ist möglich nach 1.9.) Es ist $\gamma\pi \in \Gamma_1(g)$ und $V_{\gamma\pi} = V_\gamma$. Ebenso gibt es eine Projektivität $\rho: A \rightarrow g$ mit dieser Eigenschaft, es ist also $\gamma\rho \in \Gamma_0$ und $V_{\gamma\rho} = V_\gamma$.

Die Mengen $V_\sigma(P)$ sind offene Umgebungen von P : Sei $X \in V_\sigma(P)$, dann gilt $V_\sigma(X) = V_\sigma(P)$, denn für $Y \in V_\sigma(X)$ gilt $Y\sigma\lambda = X\sigma\lambda = P\sigma\lambda$. $\square$

Die Topologie auf der Geraden g (bzw. auf dem Büschel $\overset{*}{P}$) wird mit T_g (T_P) bezeichnet.

Lemma 2.3. *Bezüglich der in Lemma 2.2. gefundenen uniformen Strukturen sind Projektivitäten gleichmäßig stetige Abbildungen. Ist $P' \in P'$, so ist $P'^{\lambda^{-1}} \cap g$ offen in T_g für alle $g \in G$.*

Beweis.

Es genügt zu zeigen, daß jede Perspektivität $\tau: g \rightarrow \overset{*}{G}$ ($G \in \mathbb{G}$) gleichmäßig stetig ist. Dazu muß gezeigt werden, daß für alle $V \in U_G$ ein $U \in U_g$ existiert, so daß für $(x, y) \in U$ gilt: $(x^\tau, y^\tau) \in V$.

Es genügt, diese Eigenschaft für eine Subbasis nachzuweisen. Sei V_{σ}^G vorgegeben. Wegen

$$(x, y) \in V_{\tau\sigma}^G \iff x^{\tau\sigma\lambda} = y^{\tau\sigma\lambda} \iff (x^{\tau}, y^{\tau}) \in V_{\sigma}^G$$

gilt die Behauptung. Der zweite Teil des Lemmas folgt wegen

$$V_{id}^G(P) = \{QIg : P^{\lambda} = Q^{\lambda}\} = (P^{\lambda})^{\lambda^{-1}} \cap g. \quad \square$$

Lemma 2.4. Sei $g \in G$. Dann ist (g, T_g) hausdorffsch und total unzusammenhängend. Die duale Aussage gilt auf den Geradenbüscheln.

Beweis.

T_g ist hausdorffsch: Seien P, QIg . Ist $P^{\lambda} \neq Q^{\lambda}$, so ist $V_{id}^G(P) \cap V_{id}^G(Q) = \emptyset$. Sei jetzt $P^{\lambda} = Q^{\lambda}$. Sei h eine Gerade mit $g \neq h$ und seien $P', Q'Ih$ mit $P', Q'Ig$ und $P'^{\lambda} \neq Q'^{\lambda}$. Sei σ die Perspektivität von g nach h , die P nach P' und Q nach Q' abbildet. Dann ist $V_{\sigma}^G(P) \cap V_{\sigma}^G(Q) = \emptyset$.

Die Mengen $V_{\sigma}^G(P)$ sind abgeschlossen, denn das Komplement

$$g \setminus V_{\sigma}^G(P) = \bigcup_{Q \notin V_{\sigma}^G(P)} V_{\sigma}^G(Q)$$

ist offen. Da die Zusammenhangskomponente von P in jeder gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Menge enthalten ist, folgt, daß sie nur aus P besteht. $\square$

Die Topologie jeder Geraden g ist also uniformisierbar und hausdorffsch, damit ist g vollständig regulär¹⁾.

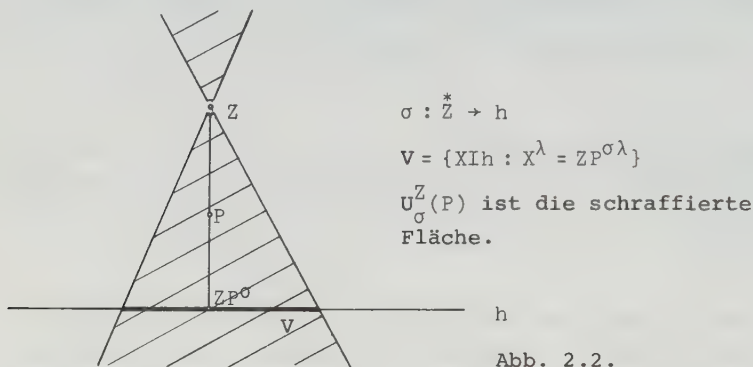
Definition 2.5. Sei $\lambda : E \rightarrow E'$ ein nicht injektiver Epimorphismus. Für $P, Z \in P$, $P \neq Z$ und $\sigma \in \Gamma(Z)$ wird gesetzt:

¹⁾ Bourbaki [6], IX, §1, N°5.

$$U_{\sigma}^Z(P) = \{P \ni Q \neq Z : (ZQ)^{\sigma\lambda} = (ZP)^{\sigma\lambda}\}. \quad (\text{Abb. 2.2.})$$

Dual wird für Geraden $p \neq z$ und $\sigma \in \Gamma(z)$ erklärt:

$$U_{\sigma}^Z(p) = \{G \ni q \neq z : (z \cap q)^{\sigma\lambda} = (z \cap p)^{\sigma\lambda}\}.$$



Satz 2.6. In den Bezeichnungen der Definition 2.5. ist $\{U_{\sigma}^Z(P) : P \ni Z \neq P, \sigma \in \Gamma(Z)\}$ eine Subbasis offener Mengen eines Umgebungssystems von P in P . Die Spurtopologie auf der Geraden g ist T_g . Die duale Aussage gilt auf dem Geradenraum. Mit diesem Paar von Topologien ist E eine Lenz-topologische Ebene (siehe Definition 1.14.).

Beweis.

Für $X \in U_{\sigma}^Z(P)$ ist wieder $U_{\sigma}^Z(P) = U_{\sigma}^Z(X)$, also bilden die Mengen eine Subbasis eines Umgebungsfilters und sind offen.

Die Spurtopologie auf g ist T_g : Sei $U_{\sigma}^Z(Q)$ gegeben. Falls $U_{\sigma}^Z(Q) \cap g \neq \emptyset$ ist, gibt es ein $P \in g$ mit $U_{\sigma}^Z(P) = U_{\sigma}^Z(Q)$. Dann ist $U_{\sigma}^Z(P) \cap g$ eine T_g -Umgebung von P :

Falls $Z \nmid g$ ist, so ist $U_{\sigma}^Z(P) \cap g = g \setminus Z$, also offen. Sei jetzt $Z \nmid g$ und sei $\pi: g \rightarrow \tilde{Z}^*$ die Perspektivität. Es gilt

$$U_{\sigma}^Z(P) \cap g = V_{\pi\sigma}^g(P) \in T_g,$$

denn für $X \in \mathbb{P}^1(g)$ gilt:

$$X \in U_{\sigma}^Z(P) \iff (XZ)^{\sigma\lambda} = (PZ)^{\sigma\lambda} \iff X^{\pi\sigma\lambda} = P^{\pi\sigma\lambda} \iff X \in V_{\pi\sigma}^g(P).$$

Sei umgekehrt $V_{\tau}^g(P)$ gegeben. Sei Z das erste Projektionszentrum von τ und $\pi: \mathbb{P}^1 \rightarrow g$ die Perspektivität. Dann gilt:

$$V_{\tau}^g(P) = U_{\pi\tau}^Z(P) \cap g.$$

Zentralprojektionen sind stetig: Dazu sei die Zentralprojektion $\rho: P \setminus Z \rightarrow g$ und die Perspektivität $\pi: \mathbb{P}^1 \rightarrow g$ gegeben,
 $Q \mapsto QZ \cap g$ $h \mapsto g \cap h$

sei $P \cap g$ und $V_{\sigma}^g(P)$ eine Umgebung von P auf g . Dann ist

$$(V_{\sigma}^g(P))^{\rho^{-1}} = U_{\pi\sigma}^Z(P),$$

also offen, denn

$$\begin{aligned} X \in U_{\pi\sigma}^Z(P) &\iff (XZ)^{\pi\sigma\lambda} = (PZ)^{\pi\sigma\lambda} \iff (XZ \cap g)^{\sigma\lambda} = (PZ \cap g)^{\sigma\lambda} = P^{\sigma\lambda} \\ &\iff XZ \cap g \in V_{\sigma}^g(P) \iff X \in V_{\pi\sigma}^g(P)^{\rho^{-1}}. \end{aligned}$$

Die dualen Aussagen erhält man für den Geradenraum. Da nach Lemma 2.3. alle Perspektivitäten stetig sind, ist E eine Lenz-topologische Ebene. □

Bemerkung 2.7. Es gilt $U_{\sigma}^Z(P) = \{Q: QZ \in V_{\sigma}^Z(ZP)\}$. Daraus ergibt sich, daß man sich in der Beschreibung der Subbasis aus Satz 2.6. wie in Lemma 2.2. auf Projektivitäten aus $\Gamma_0(Z)$ bzw. aus $\Gamma_1(Z)$ beschränken kann. □

Es kann im allgemeinen nicht erwartet werden, daß die Mengen aus der Definition 2.1. schon eine Basis der Topologie T_g bilden. Zu gegebenen Projektivitäten $\sigma, \tau \in \Gamma(g)$ läßt sich kein $\gamma \in \Gamma(g)$ finden, so daß aus $P\gamma^{\lambda} = X\gamma^{\lambda}$ sowohl $P^{\sigma\lambda} = X^{\sigma\lambda}$ als auch $P^{\tau\lambda} = X^{\tau\lambda}$ folgt. Aus diesem Grund kann auch nicht ausgeschlossen werden, daß die Topologie auf den Geraden diskret ist. Jede einzelne Subbasismenge enthält zwar unendlich viele Elemente (nach Satz 1.4.), im Durchschnitt zweier Umgebungen von

P kann aber möglicherweise nur der Punkt P selbst enthalten sein. Die gleiche Möglichkeit besteht für die im letzten Satz auf der Ebene E definierte Topologie. Ein Beispiel, in dem die Topologie diskret wird, ist jedoch nicht bekannt. Die Topologien auf Punktraum und Geradenraum der projektiven Ebene E mit nicht injektivem Epimorphismus λ werden beide mit T_λ bezeichnet und heißen *Stellentopologie* von E .

Topologische Eigenschaften

Lemma 2.8. *Sei (E, T) eine Lenz-topologische Ebene. Dann sind Schneiden und Verbinden partiell stetig.*

Beweis.

Es genügt zu zeigen, daß das Verbinden der Punkte P und X für festes P stetig ist, also die Abbildung:

$$\begin{aligned} v : P \setminus P &\longrightarrow \overset{*}{P} \\ X &\longmapsto PX \end{aligned}$$

v läßt sich aber aus einer Zentralprojektion und aus einer Perspektivität zusammensetzen. Sei $g \in G$ mit $P \notin g$. Dann ist

$$\begin{aligned} v : P \setminus P &\longrightarrow g \longrightarrow \overset{*}{P} \\ X &\longmapsto PXng \longmapsto PX, \end{aligned}$$

also ist v stetig. □

Der folgende Satz zählt grundlegende Eigenschaften der Stellentopologie auf. Man vergleiche ihn mit Satz 1.10., in dem Eigenschaften topologischer projektiver Ebenen angegeben werden.

Satz 2.9. Sei $E = (P, G, I)$ eine projektive Ebene mit Stellen-topologie T_λ . Für die Topologie des Punktraumes gilt:

1. Je zwei Geraden sind (als Punktreihen) homöomorph.
2. P ist hausdorffsch, Punkte sind abgeschlossen.
3. Geraden sind abgeschlossen.
4. P ist regulär.
5. P ist total unzusammenhängend.
6. Die Topologie auf dem Punktraum jeder affinen Ebene ist feiner als die Produkttopologie zweier affiner Geraden.

Auf dem Geradenraum gelten die zu 1. bis 6. dualen Aussagen.
Weiter gilt:

7. Projektivitäten und zentrale Kollineationen sind stetig.
8. Schneiden und Verbinden sind partiell stetig.

Beweis.

Zu 1.: Aus Satz 2.6. folgt, daß Projektivitäten Homöomorphismen sind, also sind je zwei Geraden homöomorph.

Zu 2.: Seien $P, Q \in P$, $g = PQ$. Nach Lemma 2.4. gibt es disjunkte Umgebungen U, V von P, Q auf g . Sei $Z \notin g$ und sei $\rho: P \setminus Z \rightarrow g$ die Zentralprojektion. Dann sind $\rho^{-1}(U)$ und $\rho^{-1}(V)$ disjunkte Umgebungen von P und Q (Abb. 2.3.). Insbesondere folgt also, daß Punkte abgeschlossen sind.

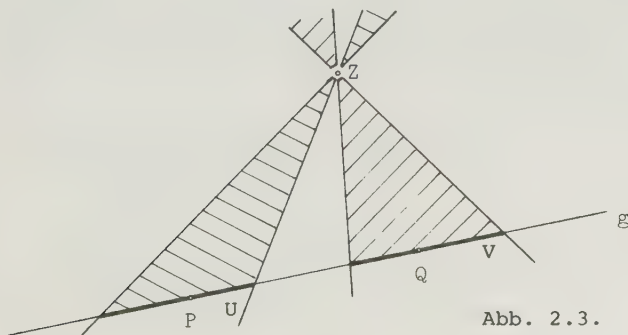


Abb. 2.3.

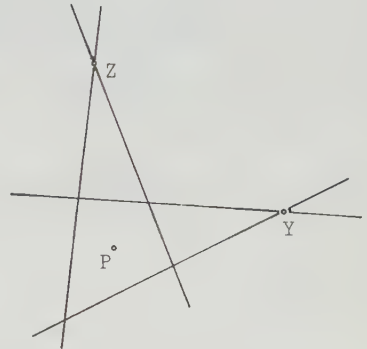
Zu 3.: Nach 2.6. sind Zentralprojektionen stetig; daraus folgt, daß in $P \setminus Z$ jede affine Gerade $g \setminus Z$ durch Z als Urbild eines Punktes abgeschlossen ist. Da der Punkt Z selbst abgeschlossen ist, ist damit jede projektive Gerade durch Z und folglich jede projektive Gerade abgeschlossen.

Zu 4. und 5.: Die Mengen $\bar{U}_Y^S(Q) = U_Y^S(Q) \cup \{S\}$ sind abgeschlossen, denn das Komplement ist offen:

$$P \setminus (U_Y^S(Q) \cup \{S\}) = \bigcup_{S \neq R \notin U_Y^S(Q)} U_Y^S(R).$$

Sei jetzt $U_\sigma^Z(P)$ vorgegeben und o.B.d.A. $U_\sigma^Z(P) \subsetneq P \setminus Z$. Sei $Y \in P$ und $Z \neq Y \notin U_\sigma^Z(P)$. Wegen Lemma 2.4. gibt es $\tau \in \Gamma(Y)$ mit $(ZY)^{\tau\lambda} = (PY)^{\tau\lambda}$ also $Z \notin U_\tau^Y(P)$. Dann ist

$$U_\sigma^Z(P) \cap U_\tau^Y(P) = \bar{U}_\sigma^Z(P) \cap \bar{U}_\tau^Y(P)$$



offen und abgeschlossen (Abb. 2.4.).

Abb. 2.4.

Jede Umgebung von P enthält also eine sowohl offene als auch abgeschlossene Umgebung. Also ist P regulär und wie in Lemma 2.4. folgt auch, daß P total unzusammenhängend ist.

Zu 6.: Da P ein topologischer projektiver Raum im Sinne von Lenz ist, folgt dies nach Satz 1.13..

Zu 7.: Es ist nur noch die Stetigkeit zentraler Kollineationen zu zeigen. Sei τ eine zentrale Kollineation. Die Einschränkung von τ auf ein Büschel ist eine Projektivität und wird wieder mit τ bezeichnet. Dann ist

$$\begin{aligned} (U_\sigma^Z(P))^{\tau^{-1}} &= \{X^{\tau^{-1}} : (XZ)^{\sigma\lambda} = (PZ)^{\sigma\lambda}\} = \{X : (X^{\tau}Z)^{\sigma\lambda} = (PZ)^{\sigma\lambda}\} = \\ &= \{X : (XZ^{\tau^{-1}})^{\tau\sigma\lambda} = (P^{\tau^{-1}}Z^{\tau^{-1}})^{\tau\sigma\lambda}\} = U_{\tau\sigma}^{Z^{\tau^{-1}}}(P^{\tau^{-1}}). \end{aligned}$$

Also ist τ stetig auf P , dual folgt die Stetigkeit auf G .

Die Aussage 8. wurde schon in Lemma 2.8. bewiesen. □

Satz 2.10. Sei (E, T_λ) eine projektive Ebene mit Stellentopologie. Dann sind Punktraum und Geradenraum vollständig regulär.

Beweis.

Es genügt wieder, den Beweis für den Punktraum zu führen. Jede Gerade ist vollständig regulär. Da sich diese Eigenschaft auf Unterräume und Produkträume vererbt, ist jede affine Gerade und damit jede affine Ebene in der Produkttopologie vollständig regulär. Ein topologischer Hausdorffraum X ist nach Bourbaki [6], IX, §1, N°5 vollständig regulär, wenn gilt:

Zu jedem $x \in X$ und zu jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt es eine stetige Funktion $f: X \rightarrow [0, 1]$, mit $f(x) = 0$, $f(X \setminus U) \subset \{1\}$.

Sei jetzt $P \in P$. Nach dem Beweis von 2.9.4. besitzt P eine Subbasis gleichzeitig offener und abgeschlossener Mengen der Form:

$$(*) \quad W = U_O^U(P) \cap U_T^V(P) \text{ mit } UV \subset P \setminus W; \quad U, V, P \text{ nicht kollinear.}$$

Wird jetzt der affine Punktraum $A = P \setminus UV$ bezüglich $P = O, U, V$ und eines vierten Punktes E koordinatisiert, so ist

$$W = \{(x, y) : (yU)^{\sigma\lambda} = (pU)^{\sigma\lambda}, (xV)^{\tau\lambda} = (pV)^{\tau\lambda}\}$$

eine Umgebung von P in der Produkttopologie (Abb. 2.5.).

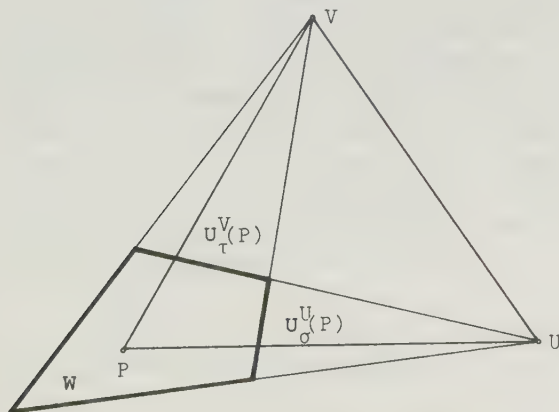


Abb. 2.5.

Es gibt also eine in der Produkttopologie stetige Funktion

$$f: A \longrightarrow [0,1] \text{ mit } f(P) = 0 \text{ und } f(A \setminus W) \subset \{1\}.$$

Also ist f auch in der feineren Stellentopologie stetig.

f läßt sich zu einer stetigen Funktion auf P fortsetzen durch

$$\tilde{f}(Q) = \begin{cases} f(Q) & \text{falls } Q \in A \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\tilde{f}$ ist stetig, denn für eine offene Menge $U \subset [0,1]$ gilt:

falls $1 \notin U$: $\tilde{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ ist offen in A , also offen in P ,

falls $1 \in U$: $\tilde{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cup (UV \cup A \setminus W) = f^{-1}(U) \cup P \setminus W$ ist offen in P ,
da W abgeschlossen ist.

Sei nun $U \in \mathcal{U}(P)$ beliebig und $U \supset \bigcap_{i=1}^n W_i$, wobei die W_i zu $U_i, V_i, \sigma_i, \tau_i$ wie W zu U, V, σ, τ in (*) gewählt sind. Seien

$\tilde{f}_i: P \longrightarrow [0,1]$ zu W_i bestimmt, wie $\tilde{f}$ zu W . Dann ist

$$\begin{aligned} f: P &\longrightarrow [0,1] \\ Q &\longmapsto \max\{\tilde{f}_i(Q)\} \end{aligned}$$

eine stetige Funktion mit $f(P) = 0$, $f(P \setminus U) \subset \{1\}$. □

Die Ebene (E, T_λ) ist also uniformisierbar, es läßt sich jedoch nicht auf einfache Weise eine uniforme Struktur angeben wie auf den projektiven Geraden. Liegt eine topologische Ebene E nicht in der Lenz-Barlotti Klasse I_1 , so ist sie vollständig regulär, da es dann auf einem Koordinatenkörper eine Loop gibt, die eine Gruppe und damit uniformisierbar ist. Diese Uniformität läßt sich (analog zu 2.10.) auf die projektive Ebene fortsetzen. Meines Wissens sind bislang keine topologischen Ebenen bekannt, die nicht vollständig regulär sind.

Es ist nun leicht zu sehen, daß T_λ auf allen Ternärkörpern die am Anfang des Kapitels erwähnten Stetigkeitseigenschaften hat.

Satz 2.11. Sei (E, T_λ) eine projektive Ebene mit Stellentopologie, (K, T) ein Ternärkörper zu E . Dann sind T und die Umkehroperationen T_1, T_2, T_3 zu T aus Definition 1.2. in allen Variablen partiell stetig; Urbilder von Punkten sind offen in K .

Beweis.

Werden alle Variablen bis auf eine festgehalten, so entsteht das Ergebnis der Abbildungen T, T_1, T_2, T_3 geometrisch entweder durch eine Projektivität von K auf sich oder ist konstant (etwa im Fall $x \mapsto T(0, x, b)$). In jedem Fall sind die Abbildungen also stetig. Lemma 2.3. zeigt, daß Urbilder von Punkten offen sind. □

Vergleich von Topologien projektiver Ebenen

In der weiteren Arbeit werden projektive Ebenen mit Epimorphismen untersucht, die, versehen mit der Stellentopologie, zu topologischen projektiven Ebenen werden. Wesentliche Ergebnisse der späteren Kapitel werden dadurch erzielt, daß die Stellentopologie einer Ebene mit einer anderen, schon bekannten Topologie verglichen wird. Die zu Beginn des Kapitels angekündigte Charakterisierung der Stellentopologie als die größte Topologie, in der Urbilder von Punkten (bzw. von Geraden) offen sind und Zentralprojektionen stetig sind, erweist sich hierbei als nützlich. Sie ermöglicht in den Berechnungen oft den Verzicht auf die explizite Beschreibung der Topologie aus Definition 2.5.. Diese Charakterisierung soll nun hergeleitet werden und im Anschluß daran erste Folgerungen daraus gezogen werden.

Satz 2.12. Sei (E, T_λ) eine projektive Ebene mit Stellentopologie. Dann ist T_λ auf dem Punktraum und auf dem Geradenraum die größte Topologie, in der Zentralprojektionen stetig sind und Urbilder von Punkten (bzw. Geraden) offene Mengen sind.

Beweis.

Bezüglich T_λ sind Zentralprojektionen nach Satz 2.6. stetig.

Urbilder von Punkten sind offen: Sei $P \in P$ beliebig und seien Z, Y so gewählt, daß $Z^\lambda, Y^\lambda, P^\lambda$ nicht kollinear sind. Dann ist

$$U_{\text{id}}^Z(P) \cap U_{\text{id}}^Y(P) = \{X : (XZ)^\lambda = (PZ)^\lambda; (XY)^\lambda = (PY)^\lambda\} = \{X : X^\lambda = P^\lambda\},$$

denn

$$(XZ)^\lambda = (PZ)^\lambda; (XY)^\lambda = (PY)^\lambda \iff X^\lambda = (PZ)^\lambda \cap (PY)^\lambda = P^\lambda.$$

Sei S eine weitere Topologie mit diesen Eigenschaften. Zu zeigen ist, daß jede T_λ -Umgebung auch eine S -Umgebung ist. Sei dazu $U_\sigma^Z(P)$ vorgegeben. Nach Bemerkung 2.7. kann $\sigma \in \Gamma_1(Z)$ gewählt werden. Sei σ eine Projektivität auf die Gerade h . Weiter sei $g \in G$ mit $g \notin Z$ und $\tau : g \rightarrow Z$ die Perspektivität. Dann ist $\tau\sigma : g \rightarrow h$ eine Projektivität im Punktraum. Aus der Stetigkeit von Zentralprojektionen bezüglich S folgt, daß Perspektivitäten von Geraden auf Geraden stetig und damit Homöomorphismen sind. Also ist auch $\tau\sigma$ ein Homöomorphismus in S . Es ist

$$U_\sigma^Z(P) = \{X : (ZX)^\sigma = (ZP)^\sigma\} = \{X : (ZX\tau\sigma)^\tau = (ZP\tau\sigma)^\tau\}.$$

Sei $V = \{Y \in h : Y^\lambda = ((ZP\tau\sigma)^\tau)^\lambda\}$. Es ist V offen in der von S auf h induzierten Topologie. Dann ist auch

$$V^{(\tau\sigma)^{-1}} = \{X \in g : X^{\tau\sigma\lambda} = (ZP\tau\sigma)^\tau\}$$

offen in $S|g$. Ist nun $\rho : P \setminus Z \rightarrow g$ die Zentralprojektion, so folgt, daß

$$V^{(\tau\sigma)^{-1}\rho^{-1}} = \{X \in P \setminus Z : (ZX\tau\sigma)^\tau = (ZP\tau\sigma)^\tau\} = U_\sigma^Z(P)$$

eine S -Umgebung von P ist. □

Zusammen mit dem folgenden Lemma wird dieser Satz häufig benötigt, um die Stellentopologie projektiver Ebenen zu bestimmen.

Lemma 2.13. *Sei (E, T) eine topologische projektive Ebene, (E, S) eine Lenz-topologische Ebene. Sei g eine Gerade und Plg . Ist das Umgebungssystem von P bezüglich $S|g$ feiner als das Umgebungssystem bezüglich $T|g$, so ist S feiner als T .*

Beweis.

Da Projektivitäten bezüglich S und T stetig sind, gilt auf der Punktreihe g und damit auf jeder Punktreihe und auf jedem Büschel X , daß $S|X$ feiner als $T|X$ ist. Wegen 1.10.6. und 1.13. ist damit auf jeder affinen Ebene A die Topologie $S|A$ feiner als $T|A$. Geraden sind bezüglich beider Topologien abgeschlossen (für S nach Lenz [15], S. 344, 3.3.). Daher kann der Punktraum durch drei affine Ebenen offen überdeckt werden, und die Behauptung folgt für den Punktraum. Dual schließt man für den Geradenraum. $\square$

Die folgende erste Anwendung von 2.12. und 2.13. ist typisch auch für Beweise in späteren Kapiteln.

Satz 2.14. *Sei (E, λ) eine pappossche oder desarguessche projektive Ebene mit Epimorphismus λ . Es gebe einen Ternärkörper K , auf dem λ eine normale Stelle induziert. Dann ist die Fortsetzung der Bewertungstopologie T_K von K auf E gleich der Stellentopologie zu λ . Die Ebene (E, T_λ) ist damit eine topologische projektive Ebene.*

Beweis.

Es werde mit T die Fortsetzung der Bewertungstopologie T_K von K auf E bezeichnet. Nach 2.11. und 1.21. ist $T_\lambda|K$ feiner als T_K . Wegen 2.13. ist also auch T_λ feiner als T . Lokal ist T das Produkt der Topologie T_K , daher ist $\{X: X^\lambda = 0^\lambda\}$ offen in T . Sei nun $P \in P$ beliebig und σ eine zentrale Kollineation mit

$0^\sigma = P$, so daß auch $\sigma\lambda$ eine zentrale Kollineation im Bild unter λ induziert (vgl. Satz 1.7.). Dann gilt

$$(\{X: X^\lambda = 0^\lambda\})^\sigma = \{X^\sigma: X^\lambda = 0^\lambda\} = \{X^\sigma: X^{\sigma\lambda} = 0^{\sigma\lambda}\} = \{X: X^\lambda = P^\lambda\},$$

und da σ ein Homöomorphismus ist, sind bezüglich T alle Urbilder von Punkten offen. Dual schließt man, daß Urbilder von Geraden offen sind. Zentralprojektionen sind in T stetig, da (E, T) eine topologische Ebene ist. Also ist nach 2.12. T feiner als T_λ . $\square$

Das folgende Ergebnis ist für topologische projektive Ebenen bei Breitsprecher [7], S.166 zu finden. Es gilt auch für Lenz-topologische Ebenen.

Satz 2.15. *Seien (E, T) , (E', T') Lenz-topologische Ebenen. Ist $\lambda: E \rightarrow E'$ ein stetiger, nicht injektiver Epimorphismus, so bleibt λ stetig, wenn T' durch die diskrete Topologie ersetzt wird.*

Beweis. (vgl. [7], S.166)

Zu zeigen ist nur, daß Urbilder von Punkten (bzw. Geraden) offen sind. Es genügt, Urbilder von Punkten zu betrachten. Hierzu wird zunächst gezeigt, daß auf jeder Geraden g mit PIg die Menge $\{X|g: X^\lambda = P^\lambda\}$ offen ist. Seien dazu P, g gegeben mit PIg . Sei $R|g$ mit $R^\lambda = P^\lambda$ und seien $h, l \in G$ mit $h \nparallel R$, $h^\lambda = g^\lambda$ und $l \parallel R$, $l^\lambda \neq g^\lambda$. Sei weiter $Q = l \cap h$, also $Q^\lambda = R^\lambda$ (Abb. 2.6.).

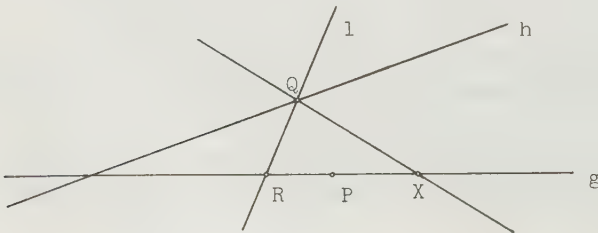


Abb. 2.6.

Der Geradenraum von E' ist ein topologischer projektiver Raum, insbesondere sind die einpunktigen Mengen abgeschlossen (Lenz [15], S.344). Da λ stetig ist, ist die Menge $\{x \in \tilde{Q} : x^\lambda = h^\lambda\}$ abgeschlossen in $\tilde{Q}$. Damit ist auch $\{XIg : XQ^\lambda = h^\lambda\}$ auf g als Bild unter der Perspektivität von $\tilde{Q}$ abgeschlossen. Es ist also

$$V = \{XIg : XQ^\lambda \neq h^\lambda\}$$

offen auf g und wegen $RQ^\lambda = l^\lambda \neq h^\lambda$ eine Umgebung von R . Für $X \in V$ folgt wegen XIg und $XQ^\lambda \neq g^\lambda$ auch $X^\lambda = R^\lambda$.

Nun wird gezeigt, daß Urbilder von Punkten offen sind. Zu P seien Q, R so gewählt, daß $P^\lambda, Q^\lambda, R^\lambda$ ein Dreieck bilden. Dann sind

$$U = \{X \neq R : (XR \cap PQ)^\lambda = P^\lambda\}$$

$$V = \{X \neq Q : (XQ \cap PR)^\lambda = P^\lambda\}$$

als Urbilder offener Mengen auf PQ bzw. auf PR unter Zentralprojektionen offen, also ist auch $U \cup V$ offen und für $X \in U \cup V$ gilt $X^\lambda = P^\lambda$. □

Folgerung 2.16. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.15. ist die Topologie T feiner als die Stellentopologie T_λ .*

Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus 2.12. und 2.15.. □

Folgerung 2.17. *Zusammenhängende topologische projektive Ebenen haben keine stetigen nicht injektiven Epimorphismen.*

Dieses Ergebnis ist auch bei Breitsprecher [7] zu finden. Es ergibt sich hier daraus, daß die Stellentopologie einer projektiven Ebene total unzusammenhängend ist. □

Mit Hilfe der Folgerung 2.16. ist eine Aussage darüber möglich, wie sich die Stellentopologie einer Ebene ändert, wenn an die Bildebene ein weiterer Epimorphismus angehängt wird.

Satz 2.18. *Seien $E \xrightarrow{\lambda} E' \xrightarrow{\mu} E''$ nicht injektive Epimorphismen projektiver Ebenen. Auf E ist T_λ feiner als $T_{\mu \circ \lambda}$, und es gilt $T_\lambda = T_{\mu \circ \lambda}$ genau dann, wenn $\lambda : (E, T_{\mu \circ \lambda}) \longrightarrow (E', T_\mu)$ stetig ist.*

Beweis.

Es bezeichne D die diskrete Topologie. Da die Abbildungen

$$(E, T_\lambda) \xrightarrow{\lambda} (E', D) \xrightarrow{\mu} (E'', D)$$

stetig sind, also $\mu \circ \lambda$ bezüglich T_λ und D stetig ist, folgt nach 2.16. die erste Behauptung.

Ist $\lambda : (E, T_{\mu \circ \lambda}) \longrightarrow (E', T_\mu)$ stetig, so folgt genauso, daß $T_{\mu \circ \lambda}$ feiner als T_λ ist.

Sei umgekehrt $T_\lambda = T_{\mu \circ \lambda}$. Aus der Stetigkeit von

$\lambda : (E, T_\lambda) \longrightarrow (E', D)$ folgt, daß auch $\lambda : (E, T_\lambda) \longrightarrow (E', T_\mu)$ stetig ist und damit die Behauptung. $\square$

3. Moufangebenen und desarguessche Ebenen

Moufangebenen sind die projektiven Ebenen, die (C, g) -transitiv sind für jeden Punkt C und jede Gerade g mit CIg . Es sind gerade die Ebenen, die durch Alternativkörper koordinatisiert werden (vgl. Pickert [21], S.106). Die desarguesschen Ebenen sind die durch Schiefkörper koordinatisierten Ebenen. Auch in Moufangebenen und desarguesschen Ebenen erweist sich die durch einen Epimorphismus induzierte Stellentopologie als eine nicht diskrete Topologie, in der Schneiden und Verbinden stetig sind. Allerdings kann dies nicht direkt nachgerechnet werden. Wie bei den Ebenen aus Satz 2.14. muß eine von der Stelle auf einem Koordinatenkörper induzierte Topologie gefunden werden, die diesen Ternärkörper zu einem topologischen Ternärkörper macht. Diese Topologie kann dann nach Satz 1.11. auf die Ebene fortgesetzt werden. Der Vergleich dieser Topologie mit der Stellentopologie T_λ liefert die Übereinstimmung.

Aus der (C, g) -Transitivität der Ebene für alle CIg ergibt sich die Möglichkeit einer einfacheren Charakterisierung der Stellentopologie mit Hilfe zentraler Kollineationen. Durch diese Darstellung läßt sich konkret eine uniforme Struktur angeben, welche die Stellentopologie induziert und bezüglich der Projektivitäten und zentrale Kollineationen gleichmäßig stetig sind.

Stellen von Alternativkörpern

Ist (K, λ) ein Alternativkörper mit Stelle λ , so läßt sich unmittelbar eine Subbasis eines Umgebungsfilters für jeden Punkt $x \in K$ angeben, so daß K mit dieser Topologie zu einem topologischen Ternärkörper wird. Jedes solche Subbasisele-

ment enthält zwar unendlich viele Elemente des Alternativkörpers, es könnte aber möglich sein, daß die Topologie trotzdem diskret ist. Um dies auszuschließen, ist es notwendig, zunächst die Struktur von Alternativkörpern und Stellen von Alternativkörpern näher zu untersuchen. Im Anschluß daran wird eine - nicht diskrete - Topologie auf Alternativ- und Schiefkörpern definiert und die Stetigkeit der Verknüpfungen nachgewiesen.

Zunächst sollen ohne Beweis einige Eigenschaften von Alternativkörpern zusammengestellt werden, die im folgenden benötigt werden. In dem Alternativkörper K sei für $a, b, c \in K$ der *Assoziator* $[a, b, c]$ definiert durch $[a, b, c] = (ab)c - a(bc)$. Ein Alternativkörper wird als *echt* bezeichnet, wenn es in ihm Elemente a, b, c mit $[a, b, c] \neq 0$ gibt. Das *Zentrum* Z eines Alternativkörpers K ist die Menge der $k \in K$ mit $ky = yk$ und $[k, y, z] = 0$ für alle $y, z \in K$. Z ist ein kommutativer Körper (siehe [21], S.164.).

Lemma 3.1. *Sei K ein Alternativkörper. Dann gilt für $a, b, c,$*

$a_1, a_2, a_3 \in K$:

1. $[a^{-1}, a, b] = [b, a, a^{-1}] = 0$ für $a \neq 0$.
2. Ist π eine Permutation der Menge $\{1, 2, 3\}$, so gilt
 $[a_1, a_2, a_3] = \text{sign}(\pi) \cdot [a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, a_{\pi(3)}]$.
3. Es gelten die Moufangidentitäten:

$$\begin{aligned} a(bc)a &= (ab)(ca), \\ a(b(ac)) &= (aba)c, \\ ((ca)b)a &= c(aba). \end{aligned}$$

Die Beweise hierzu findet man in Pickert [21], S. 157ff..□

Aus 3.1.2. folgt insbesondere, daß in Ausdrücken, die nur zwei verschiedene Elemente enthalten, die Assoziativität gilt. Hierdurch ist die Klammernsetzung in 3.1.3. gerechtfertigt. Auch im folgenden wird hiervon Gebrauch gemacht.

Für den Zusammenhang zwischen Epimorphismen von Moufanggebieten und Stellen von Ternärkörpern gilt Satz 1.5.. Wie schon im Anschluß an 1.6. erwähnt, gilt in Erweiterung dazu noch:

Satz 3.2. *Es seien K, K' Alternativkörper. Eine surjektive Abbildung $\lambda: K \rightarrow K' \cup \{\infty\}$ ist genau dann eine Stelle von K nach K' , wenn λ die Bedingungen (S1') bis (S4') aus Satz 1.5. erfüllt.*

Beweis.

Der Beweis dieses Satzes ist implizit in der Arbeit von Faulkner und Ferrar [8] enthalten, soll hier aber noch einmal direkt dargestellt werden. Es ist zu zeigen, daß die Bedingungen (S5') bis (S7') aus (S1') bis (S4') folgen. Sei die Voraussetzung von (S5') erfüllt, also $(-ax + a_0x)^\lambda \neq \infty$, $x^\lambda = \infty$; dann folgt $((-a + a_0)x)^\lambda \neq \infty$, also $(-a + a_0)^\lambda = 0^\lambda$ und damit $a^\lambda = a_0^\lambda$. Genauso folgt (S6') unter Verwendung des zweiten Distributivgesetzes. Sei nun gemäß den Voraussetzungen von (S7') $a_0x + ax_0 = ax$, $a^\lambda = (a_0x)^\lambda = (ax_0)^\lambda = x^\lambda = \infty$. Zu zeigen ist $a_0^\lambda = \infty$ oder $x_0^\lambda = \infty$.

Es sei $y = a_0x$ und $b = -ax_0$, also $x_0 = -a^{-1}b$, $a_0 = yx^{-1}$, $b = -ax + y$. Angenommen, es ist $a_0^\lambda \neq \infty \neq x_0^\lambda$. Wegen $-a^{-1}b = x - a^{-1}y$ gilt:

$$\infty = (a_0x_0)^\lambda = (a_0(-a^{-1}b))^\lambda = (a_0(x - a^{-1}y))^\lambda.$$

Unter Verwendung der ersten Moufangidentität folgt:

$$\begin{aligned} \infty &= ((yx^{-1})(x - a^{-1}y))^\lambda = (y - (yx^{-1})(a^{-1}y))^\lambda = (y - (y(x^{-1}a^{-1})y))^\lambda = \\ &= (y(1 - (x^{-1}a^{-1})y))^\lambda, \end{aligned}$$

wegen $y^\lambda = \infty$ also:

$$(1) \quad ((x^{-1}a^{-1})y)^\lambda = 1.$$

Ebenso folgt

$$\infty = x_0^\lambda = (-a^{-1}b)^\lambda = (x - a^{-1}y)^\lambda = (x(1 - x^{-1}(a^{-1}y)))^\lambda$$

und wegen $x^\lambda = \infty$ also:

$$(2) \quad (x^\lambda (a^\lambda y))^\lambda = 1.$$

Aus (1) und (2) ergibt sich mit Hilfe von Lemma 3.1.2.:

$$\begin{aligned} 0 &= ((x^\lambda a^\lambda) y - x^\lambda (a^\lambda y))^\lambda = ([x^\lambda, a^\lambda, y])^\lambda = ([a^\lambda, y, x^\lambda])^\lambda = \\ &= ((a^\lambda y) x^\lambda - a^\lambda (y x^\lambda))^\lambda \end{aligned}$$

und daraus $((a^\lambda y) x^\lambda)^\lambda = 0$, denn der zweite Summand wird unter der Annahme $a_0^\lambda = (y x^\lambda)^\lambda \neq \infty$ auf Null abgebildet. Wegen $a^\lambda y = a^\lambda b + x$ gilt nun

$$0 = ((a^\lambda y) x^\lambda)^\lambda = ((a^\lambda b + x) x^\lambda)^\lambda = ((a^\lambda b) x^\lambda + 1)^\lambda,$$

also $((a^\lambda b) x^\lambda)^\lambda = -1$ im Widerspruch zu $(a^\lambda b)^\lambda \neq \infty, (x^\lambda)^\lambda = 0$. $\square$

Mit Hilfe von Satz 3.2. ergibt sich, daß Stellen von Alternativkörpern auch über Bewertungsringe beschrieben werden können. Wie im Falle eines Körpers heißt $R \subset K$ *Bewertungsring*, wenn R ein (nicht notwendig assoziativer) Unterring des Alternativkörpers K ist, und wenn aus $x \notin R$ stets $x^\lambda \in R$ folgt. Die Menge m der Nichteinheiten von R bildet ein zweiseitiges Ideal in R und R/m ist wieder ein Alternativkörper (siehe [8]).

Satz 3.3. *Sei $R \subsetneq K$ Bewertungsring des Alternativkörpers K , m das Ideal der Nichteinheiten von R . Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \lambda : K &\longrightarrow R/m \cup \{\infty\} \\ k &\longmapsto k+m \quad \text{falls } k \in R \\ k &\longmapsto \infty \quad \text{falls } k \notin R \end{aligned}$$

eine Stelle des Alternativkörpers K . Ist umgekehrt eine Stelle λ des Alternativkörpers K auf K' gegeben, so ist $R = \lambda^{-1}(K')$ ein Bewertungsring von K mit $R \subsetneq K$.

Der Beweis ist der gleiche wie im Falle eines Körpers. $\square$

Offenbar ist m gerade gleich $\lambda^1(0)$; die Abbildung λ ist genau dann surjektiv (also eine Stelle), wenn $R \subseteq K$ ist.

Satz 3.4. *Ein echter Alternativkörper ist über seinem Zentrum quadratisch, d.h. jedes Element genügt einer quadratischen Gleichung mit Koeffizienten im Zentrum.*

Zum Beweis siehe Pickert [21], S.166f. für den Fall $\text{char } K \neq 2$ und S.178f. für den Fall $\text{char } K = 2$. □

Der folgende Satz besagt, daß jeder echte Alternativkörper eine Cayley-Algebra ist. Er muß etwas ausführlicher und mit technischen Einzelheiten formuliert werden, da diese für den Beweis weiterer Aussagen benötigt werden. Siehe zu diesem Ergebnis den Abschnitt über quadratische Algebren in Pickert [21], S.168ff..

Satz 3.5. *K sei ein echter Alternativkörper über dem Zentrum Z . Dann gibt es in K Elemente f mit $f^2 \notin Z$. Weiter enthält K Elemente e_1, e_2, e_3 , so daß $1, e_1, e_2, e_3$ über Z linear unabhängig sind und so, daß*

$$Q = Z + e_1Z + e_2Z + e_3Z$$

ein Quaternionenschiefkörper ist. e_1 kann in K frei gewählt werden mit der Einschränkung, daß e_1^2 einer quadratischen Gleichung der Form $e_1^2 = e_1 + b$ mit $b \in Z$ genügt. Für e_2, e_3 gilt $e_2^2, e_3^2 \in Z$.

In Q gibt es einen involutorischen Z -Antiautomorphismus $x \mapsto \bar{x}$, d.h. einen Z -Automorphismus von $(Q, +)$ mit $\overline{\overline{xy}} = \overline{y} \cdot \overline{x}$, $\overline{\overline{x}} = x$ für alle $x, y \in Q$. Es gibt ein Element $e \in K \setminus Q$ mit $e^2 = c \in Z$, $K = Q + eQ$ und

$$(x_1 + ex_2)(y_1 + ey_2) = (x_1y_1 + cy_2\overline{x_2}) + e(\overline{x_1}y_2 + y_1x_2).$$

□

Der Übergang von einer Algebra Q über Z zu $Q+eQ$ mit dieser Multiplikationsvorschrift heißt *Cayley-Prozeß*; $Q+eQ$ heißt *Cayley-Algebra* über Z .

Der unten folgende Satz 3.7. enthält den wesentlichen Schritt zu der Aussage, daß die später definierte Topologie auf dem Alternativkörper K nicht diskret ist. Hierfür wird noch das folgende Lemma benötigt.

Lemma 3.6. *Sei K ein echter Alternativkörper mit Stelle λ und Zentrum Z . Dann ist auch $\lambda|Z$ eine echte (das heißt nicht injektive) Stelle von Z .*

Beweis.

Nach Satz 3.3. genügt es zu zeigen, daß für den zu λ gehörigen Bewertungsring $R \subsetneq K$ gilt:

$$R \cap Z \subsetneq Z,$$

denn $R \cap Z$ ist ein Bewertungsring von Z , und die zu $R \cap Z$ gehörige Stelle ist $\lambda|Z$. Angenommen $R \cap Z = Z$. Sei $x \in K \setminus R$. $Z(x)$ ist eine algebraische Körpererweiterung, denn $Z(x)$ ist als homomorphes Bild des Polynomrings $Z[X]$ assoziativ und kommutativ und nach Satz 3.4. algebraisch. Nach einem Satz aus der Bewertungstheorie (siehe z.B. Ribenboim [25], S.158, Cor. 5) sind verschiedene Bewertungsringfortsetzungen von Z auf $Z(x)$, die mit Z den gleichen Durchschnitt haben, bezüglich der Inklusion unvergleichbar. $Z(x)$ selbst und $Z(x) \cap R$ sind aber Bewertungsringe mit gleichem Durchschnitt. Weil $Z(x) \cap R \subset Z(x)$ ist, gilt also $Z(x) \cap R = Z(x)$ und damit $x \in R$ im Widerspruch zur Annahme. □

Satz 3.7. *Sei K ein echter Alternativkörper mit Stelle λ und Zentrum Z . Dann gilt:*

$$(*) \text{ für alle } a \in K \text{ gibt es unendlich viele } x \in Z \text{ mit} \\ (ax)^\lambda = 0 = (xa)^\lambda.$$

Beweis.

Im ersten Schritt wird gezeigt, daß es in K einen Quaternionenschiefkörper Q über dem Zentrum Z gibt, der wie in Satz 3.5. konstruiert ist und in dem (*) für alle $a \in Q$ erfüllt ist.

In der Konstruktion von Q kann e_1 so gewählt werden, daß $e_1 = fr^{-1}$ mit $r^{-1} \in Z$ und $f^\lambda \neq \infty$ gilt: Denn sei f mit $f^2 \notin Z$, und sei o.B.d.A. $f^\lambda \neq \infty$ (sonst wähle f^{-1} statt f). K ist eine quadratische Algebra über Z , also gibt es eine Gleichung $f^2 = fr + sr$ mit $r, s \in Z$. Wird $e_1 = fr^{-1}$ gesetzt, dann folgt $e_1^2 = e_1 + sr^2$, und e_1 ist der gewünschte Basisvektor. Sei $e_0 = 1$ und seien e_2, e_3 die beiden anderen Basisvektoren.

Da Z ein Körper ist und nach Lemma 3.6. $\lambda|Z$ eine (nicht injektive) Stelle, wird auf Z durch die Mengen

$$U_a(0) = \{x \in Z : (ax)^\lambda = 0\}; a \in Z$$

eine Umgebungsbasis $U(0)$ der zu λ gehörigen Bewertungstopologie gegeben (vgl. 1.19.). Jedes Basiselement enthält unendlich viele Elemente von Z . Seien jetzt $x \in Z$, $a \in Q$. Dann ist

$$ax = \sum_{i=0}^3 e_i c_i x, \quad c_i \in Z, i = 0, \dots, 3.$$

$(ax)^\lambda = 0$ ist jedenfalls erfüllt, wenn $(e_i c_i x)^\lambda = 0$ für $i = 0, \dots, 3$ erfüllt ist.

Nun sei $V_0 = U_{c_0}(0)$. Setze $V_1 = U_{r^{-1}c_1}(0)$.

Für $x \in V_1$ gilt $(r^{-1}c_1 x)^\lambda = 0$ und wegen $f^\lambda \neq \infty$ auch

$$(fr^{-1}c_1 x)^\lambda = (e_1 c_1 x)^\lambda = 0.$$

Sei jetzt $i = 2$ oder $i = 3$. Ist $e_i^\lambda \neq \infty$, so werde $V_i = U_{c_i}(0)$ gesetzt; aus $x \in V_i$ folgt dann auch $(e_i c_i x)^\lambda = 0$. Ist nun $e_i^\lambda = \infty$, so gilt wegen $(e_i^{-1})^\lambda = 0$:

$$(e_i^2 c_i x)^\lambda = 0 \Rightarrow (e_i^{-1} (e_i^2 c_i x))^\lambda = (e_i c_i x)^\lambda = 0.$$

Es sei $V_i = U_{e_i^{-2}c_i}(0)$ (Wegen $e_i^2 \in Z$ ist dies definiert.). Nun ist für

$x \in \bigcap_{i=0}^3 V_i \in U(0)$ also $(ax)^\lambda = 0$ erfüllt.

Zum zweiten Beweisschritt: K entstehe aus Q durch den Cayley-Prozeß; sei $K = Q + eQ$, $e^2 = c \in Z$. Es bleibt zu zeigen, daß (*) auch noch für $a = a_1 + ea_2$, $a_1, a_2 \in Q$ richtig ist.

Sei zunächst $e^\lambda \neq \infty$. Da es nach dem ersten Beweisschritt unendlich viele Elemente x im Zentrum gibt mit

$$(a_1x)^\lambda = 0, (a_2x)^\lambda = 0,$$

gilt für diese Elemente auch $(ax)^\lambda = 0$. Sei also jetzt $e^\lambda = \infty$. Dann gibt es unendlich viele Elemente $x \in Z$ mit

$$(a_1x)^\lambda = 0, (e^2a_1x)^\lambda = 0,$$

und wegen $(e^{-1})^\lambda = 0$ und $e^{-1}(e^2z) = e^{-1}(e(ez)) = ez$ folgt auch $(ea_2x)^\lambda = 0$, also wieder $(ax)^\lambda = 0$. □

Die Stellentopologie von Alternativ- und Schiefkörpern

Definition und Satz 3.8. Sei K ein Alternativkörper oder ein Schiefkörper mit Stelle λ . Für $a, b, x \in K$ sei

$${}_aV_b(x) = \{z \in K : ((a(z-x))b)^\lambda = 0\},$$

$${}_KV_K(x) = \{{}_aV_b(x) : a, b \in K\}.$$

Der von ${}_KV_K(x)$ (als Subbasis) erzeugte Filter ist ein Umgebungsfilter von x , die hierdurch erzeugte Topologie heißt Stellentopologie von K und wird (wie die Stellentopologie der projektiven Ebene) mit T_λ bezeichnet.

Zum Beweis ist nur nachzurechnen, daß es zu $y \in {}_aV_b(x)$ eine Umgebung von y in ${}_aV_b(x)$ gibt. Wegen der Gültigkeit beider Distributivgesetze ist aber

$${}_aV_b(y) \subset {}_aV_b(x),$$

denn

$$y \in {}_aV_b(x) \iff ((a(y-x))b)^\lambda = 0,$$

$$z \in {}_aV_b(y) \iff ((a(z-y))b)^\lambda = 0,$$

und daraus folgt:

$$((a(z-y))b + (a(y-x))b)^\lambda = ((a(z-x))b)^\lambda = 0.$$

□

Aus 3.7. und 3.8. ergeben sich nun verschiedene Basen für den Umgebungsfiler $U(x)$ von $x \in K$. Für den Alternativkörper oder den Schiefkörper K mit Stelle λ sei

$${}_aV_b = {}_aV_b(0); \quad {}_K^V K = {}_K^V K(0).$$

$$V_K(x) = \{{}_1V_b(x) : b \in K\}; \quad V_K = V_K(0).$$

$${}_K^V(x) = \{{}_aV_1(x) : a \in K\}; \quad {}_K^V = {}_K^V(0).$$

$${}_K^V K(x) = \{{}_aV_a(x) : a \in K\}; \quad {}_K^V K = {}_K^V K(0).$$

Für die Filtersubbasis F werde mit F^* der davon erzeugte Filter bezeichnet.

Satz 3.9. *Sei (K, λ) ein echter Alternativkörper mit Stelle λ , sei Z das Zentrum von K . In der Topologie T_λ gilt dann für $L = K$ und $L = Z$:*

$$U(x) = {}_{L=L}V_L(x)^* = {}_L^V V_L(x)^* = {}_L^V(x)^* = V_L(x)^*.$$

Alle Filtersubbasen sind schon Basen von $U(x)$, T_λ ist nicht diskret.

Beweis.

Da die Umgebungen von x aus den Umgebungen der Null durch Translationen hervorgehen, genügt es, den Beweis für $x = 0$ zu führen.

1. Offenbar gilt

$$Z \underline{V}_Z \subset V_Z = Z^V = Z^V \underline{V}_Z,$$

da die Elemente von Z mit allen Elementen von K kommutieren.

$$2. \quad K^V \underline{V}_K \subset K \underline{V}_K^*.$$

Sei dazu $\begin{smallmatrix} V \\ a \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \\ b \end{smallmatrix} \in K \underline{V}_K$ vorgegeben. Es genügt zu zeigen, daß es ein $\begin{smallmatrix} V \\ c \end{smallmatrix} \in K \underline{V}_K$ gibt mit $\begin{smallmatrix} V \\ c \end{smallmatrix} \subset \begin{smallmatrix} V \\ a \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \\ b \end{smallmatrix}$. Im Beweis wird häufig von den Moufangidentitäten (siehe Lemma 3.1.) Gebrauch gemacht.

a) $a^\lambda = 0 = b^\lambda$. Setze $c = 1$.

b) $a^\lambda \neq 0 = b^\lambda$. Setze $c = a$, dann gilt:
 $(a\zeta a)^\lambda = 0 \Rightarrow (a\zeta)^\lambda = 0 \Rightarrow ((a\zeta)b)^\lambda = 0.$

c) $a^\lambda = 0 \neq b^\lambda$. Setze $c = b$. Wegen
 $b\zeta b = b(a^{-1}(a\zeta))b = (ba^{-1})((a\zeta)b)$ und $(ba^{-1})^\lambda = \infty$ gilt dann:
 $(b\zeta b)^\lambda = 0 \Rightarrow ((a\zeta)b)^\lambda = 0.$

d) $a^\lambda \neq 0 \neq b^\lambda$. Setze $c = ba$. Wegen
 $((ba)\zeta(ba))a^{-1} = (ba)(\zeta((ba)a^{-1})) = (ba)(\zeta b) = b(a\zeta)b$
 und wegen $(a^{-1})^\lambda \neq \infty$, $b^\lambda \neq 0$ gilt dann:
 $((ba)\zeta(ba))^\lambda = 0 \Rightarrow (((ba)\zeta(ba))a^{-1})^\lambda = 0 \Rightarrow (b(a\zeta)b)^\lambda = 0 \Rightarrow$
 $((a\zeta)b)^\lambda = 0.$

$$3. \quad K \underline{V}_K^* \subset Z \underline{V}_Z^*.$$

Zu vorgegebenem $\begin{smallmatrix} V \\ a \end{smallmatrix} \in K \underline{V}_K$ soll ein $\begin{smallmatrix} V \\ k \end{smallmatrix} \in Z \underline{V}_Z$ mit $\begin{smallmatrix} V \\ k \end{smallmatrix} \subset \begin{smallmatrix} V \\ a \end{smallmatrix}$ gesucht werden. Nach Satz 3.7. gibt es ein Element $l \in Z \setminus \{0\}$ mit $(al)^\lambda = 0 = (la)^\lambda$. Für $k = l^{-1}$ gilt dann:

$$(k\zeta k)^\lambda = 0 \Rightarrow (((al)(k\zeta k))(la))^\lambda = 0,$$

und wegen $l, k \in Z$ ist

$$((al)(k\zeta k))(la) = (a\zeta k)(la) = a\zeta a,$$

also $(a\zeta a)^\lambda = 0.$

4. Wegen $V_Z \subset V_K \subset {}_K V_K$ folgt aus 1., 2. und 3.:

$${}_Z V_Z^* \subset V_Z^* \subset V_K^* \subset {}_K V_K^* \subset {}_K V_K^* \subset {}_Z V_Z^*.$$

Die gleiche Aussage gilt mit ${}_K V_K^*$ anstelle V_K^* und damit erhält man die Gleichheit aller Filter.

5. Um zu zeigen, daß die Mengensysteme Filterbasen sind, genügt es nach dem Bewiesenen, dies für V_Z und ${}_Z V_Z$ zu zeigen. Seien ${}_k V_k$ und ${}_l V_l \in {}_Z V_Z$ gegeben und o.B.d.A. $\infty = k^\lambda = l^\lambda$. Dann ist

$${}_k V_k \cap {}_l V_l,$$

denn

$$({}_k V_k \cap {}_l V_l)^\lambda = 0 \Rightarrow ({}_l V_l)^\lambda = 0 = ({}_k V_k)^\lambda,$$

da k und l im Zentrum liegen. Setzt man die Faktoren links von x gleich 1, so erhält man analog

$${}_l V_l \subset {}_k V_k \cap {}_l V_l.$$

6. T_λ ist nicht diskret, da in jedem Element aus V_Z nach Lemma 3.7. unendlich viele Elemente von Z liegen. □

Insbesondere folgt also auch, daß die Einschränkung der Stellentopologie auf das Zentrum nicht diskret ist. Diese Aussage ist in Schiefkörpern falsch, wenn das Zentrum im Bewertungsring liegt; so etwa im Beispiel von Radó [24] eines Schiefkörpers mit nicht normaler Stelle. Im allgemeinen gilt für Schiefkörper nur:

Satz 3.10. Sei (K, λ) ein Schiefkörper mit Stelle λ . In der Topologie T_λ gilt dann:

$$U(x) = {}_K V_K(x)^* = {}_K V_K(x)^*.$$

T_λ ist nicht diskret, ${}_K V_K(x)$ und ${}_K V_K(x)$ sind Basen von $U(x)$.

Beweis.

Es gilt ${}_K V_K \subset {}_K V_K$, zu zeigen ist ${}_K V_K^* \subset {}_K V_K^*$.

Sei dazu ${}_a V_b \in {}_K V_K$, gesucht ist ${}_c V_c \in {}_K V_K$ mit ${}_c V_c \subset {}_a V_b$. Es kann o.B.d.A. $\infty = a^\lambda = b^\lambda$ angenommen werden. Dann ist

$${}_b V_{ba} \subset {}_a V_b,$$

denn

$$(b(a\zeta b)a)^\lambda = 0 \Rightarrow (a\zeta b)^\lambda = 0.$$

Um zu zeigen, daß ${}_K V_K$ eine Basis von $U(0)$ ist, genügt es nach dem schon gezeigten, zu ${}_a V_a, {}_b V_b$ ein

$${}_c V_d \subset {}_a V_a \cap {}_b V_b = W$$

zu finden. Es sind vier Fälle zu unterscheiden:

a) $(ab^{-1})^\lambda = 0, (b^{-1}a)^\lambda = 0.$

Dann gilt: $(b\zeta b)^\lambda = 0 \Rightarrow (a\zeta a)^\lambda = 0$, also ist ${}_b V_b \subset W$.

b) $(ab^{-1})^\lambda = 0, (b^{-1}a)^\lambda \neq 0.$

Dann gilt: $(b\zeta a)^\lambda = 0 \Rightarrow (a\zeta a)^\lambda = 0$

$(b\zeta b)^\lambda \neq 0 \Rightarrow (b\zeta a)^\lambda \neq 0$, also ist ${}_b V_a \subset W$.

c) $(ab^{-1})^\lambda \neq 0, (b^{-1}a)^\lambda = 0.$

Dann ist analog zu b) ${}_a V_b \subset W$.

d) $(ab^{-1})^\lambda \neq 0, (b^{-1}a)^\lambda \neq 0.$

Dann gilt $(ba^{-1})^\lambda \neq \infty, (a^{-1}b)^\lambda \neq \infty$, und wie in a) folgt

${}_a V_a \subset W$.

Da in jedem Element von ${}_K V_K$ unendlich viele Elemente liegen, folgt auch, daß T_λ nicht diskret ist. $\square$

Die weitergehenden Aussagen aus Satz 3.9. für Alternativkörper sind in Schiefkörpern nicht mehr gültig. Es gibt Schiefkörper, in denen gilt:

$$V_K^* \neq {}_K V_K^* \neq {}_K V_K^*.$$

Hierzu muß noch einmal auf die durch verallgemeinerte Bewertungen induzierten Topologien eingegangen werden, wie sie Mathiak in [18] und [19] betrachtet. Eine solche Bewertung $v: K \rightarrow W$ induziert nach [19], Satz 1 genau dann eine Körpertopologie, wenn es für alle $\delta \in W$ ein $0 \neq \gamma \in W$ gibt, so daß für alle $x \in K^*$ gilt:

$$v(x) \leq \gamma \Rightarrow v(x^1) > \delta.$$

Drückt man diese Bedingung mittels der zu v gehörigen Stelle λ aus, so besagt sie gerade ¹⁾: für alle $b \in K$ gibt es ein $a \in K$, so daß für alle $x \in K$ gilt:

$$(ax)^\lambda \neq \infty \Rightarrow (xb)^\lambda = 0.$$

Nun ist dies sicher erfüllt, wenn ${}_K V^* = V_K^*$ gilt. Denn dann gibt es ein ${}_c V_1 \subset {}_1 V_b$, und ist $d \in K$ mit $\infty = d^\lambda$, so kann $a = dc$ gesetzt werden. In dem schon im ersten Kapitel erwähnten Beispiel von Mathiak [18] ist die Bewertungstopologie jedoch keine Körpertopologie, es muß dann also auch $V_K^* \neq {}_K V^*$ sein.

Ist B der Bewertungsring von K , so sind die Nullumgebungen der Bewertungstopologie nach [18] durch die Mengen aB , $a \in K^*$ gegeben. Diese Topologie wird auch von ${}_K V^*$ erzeugt, denn es gilt für $a \neq 0$, $d^\lambda = \infty$:

$$a^{-1}V_1 \subset aB; a^{-1}d^{-1}B \subset {}_a V_1.$$

Aus ${}_K V^* = {}_K V_K^*$ würde, wie im nächsten Satz 3.11. bewiesen wird, wieder folgen, daß K ein topologischer Körper ist. Also gilt in dem Mathiakschen Beispiel auch ${}_K V^* \neq {}_K V_K^*$.

Im Vergleich mit Lemma 1.19. ergibt sich, daß T_λ im Falle echter Alternativkörper die gleiche Basis hat wie die Bewertungstopologie kommutativer Körper. Die obige Bemerkung zeigt, daß dies in Schiefkörpern nicht zu gelten braucht.

¹⁾ Dabei muß berücksichtigt werden, daß in der verallgemeinerten Bewertung v für alle $a, b, c \in K$ gilt: $v(a) < v(b) \Rightarrow v(ca) < v(cb)$.

Die Topologie T_λ aus Definition 3.8. ist nur dann interessant, wenn sie den Alternativ- oder Schiefkörper zu einem topologischen Ternärkörper macht. Dies ist tatsächlich der Fall. Der Beweis dazu kann gleichzeitig für Schiefkörper und Alternativkörper geführt werden.

Satz 3.11. *Sei (K, λ) ein Alternativkörper oder ein Schiefkörper mit Stelle λ , T_λ sei die Stellentopologie zu λ . Dann ist (K, T_λ) ein topologischer Ternärkörper. T_λ ist die größte Topologie auf K , in der Urbilder von Punkten offen sind und Addition und Multiplikation partiell stetig sind.*

Beweis.

1. $(x, y) \mapsto x-y$ ist stetig:

Sei ${}_aV_a(x-y) \in {}_{K=K}V_K(x-y)$ vorgegeben. Dann ist

$${}_aV_a(x) - {}_aV_a(y) \subset {}_aV_a(x-y),$$

denn aus $\zeta \in {}_aV_a(x)$, $\xi \in {}_aV_a(y)$, also aus

$$(a(\zeta-x)a)^\lambda = 0, (a(\xi-y)a)^\lambda = 0$$

folgt $(a((\zeta-\xi) - (x-y))a)^\lambda = 0$, d.h.

$$\zeta-\xi \in {}_aV_a(x-y).$$

2. $(x, y) \mapsto x \cdot y$ ist stetig:

Sei ${}_aV_a(xy) \in {}_{K=K}V_K(xy)$ vorgegeben. Ist K ein echter Alternativkörper, so kann nach Satz 3.9. das Element a aus dem Zentrum von K gewählt werden. Nun sei

$$V(x) = {}_aV_1(x) \cap {}_aV_{ya}(x),$$

$$V(y) = {}_1V_a(y) \cap {}_{ax}V_a(y).$$

Dann gilt:

$$V(x) \cdot V(y) \subset {}_aV_a(xy).$$

Sei dazu $\zeta \in V(x)$, $\xi \in V(y)$. Aus

$$(a(\zeta-x))^{\lambda} = 0 = ((\xi-y)a)^{\lambda}$$

ergibt sich

$$0 = (a(\zeta-x)(\xi-y)a)^{\lambda} = (a(\zeta-x)(\xi a) - (\zeta-x)(ya))^{\lambda}.$$

Der zweite Summand wird auf Null abgebildet, also auch der erste:

$$0 = (a(\zeta-x)(\xi a))^{\lambda} = ((a\zeta)(\xi a) - (ax)(\xi a))^{\lambda}.$$

Weiter ist wegen $((ax)(\xi-y)a)^{\lambda} = 0$ auch $((ax)(\xi a) - (ax)(ya))^{\lambda} = 0$ und damit auch die Summe:

$$0 = ((a\zeta)(\xi a) - (ax)(ya))^{\lambda} = (a(\zeta\xi-xy)a)^{\lambda},$$

das heißt $\zeta\xi \in {}_aV_a(xy)$.

3. $x \mapsto x^{-1}$ ist stetig:

Dafür muß zu $x \neq 0$ und zu jeder Nullumgebung U' eine Nullumgebung V' gefunden werden, so daß gilt:

$$(*) \quad (x+V')^{-1} \subset x^{-1}+U'.$$

Da die Multiplikation bereits als stetig erkannt ist und $(xa)a^{-1} = x$ für alle $x \in K$ gilt, ist die Multiplikation mit einem festen Element $a \neq 0$ von rechts (und genauso von links) ein Homöomorphismus; es sind also mit V auch aV und Va Nullumgebungen. Sucht man nun zu einer Nullumgebung $U \subset xU'$ eine Nullumgebung V mit $(1+V)^{-1} \subset 1+U$, dann erfüllt $V' = Vx$ die Bedingung $(*)$, denn ¹⁾

$$(1+V)^{-1} \subset (1+U) \Rightarrow x^{-1}(1+V)^{-1} \subset x^{-1}(1+U) = x^{-1}+x^{-1}U \subset x^{-1}+U'$$

und

$$x^{-1}(1+V)^{-1} = ((1+V)x)^{-1} = (x+Vx)^{-1} = (x+V')^{-1}.$$

¹⁾ In Alternativkörpern gilt wegen $(xy)^{-1}x = (xy)^{-1}((xy)y^{-1}) = y^{-1}$ für alle x, y : $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Sei nun $U = {}_aV_a(0)$ vorgegeben. Dann ist $1+U = {}_aV_a(1)$. Setze

$$1+V = {}_1V_1(1) \cap {}_1V_a(1) \cap {}_aV_1(1) \cap {}_aV_a(1).$$

Sei $\zeta \in 1+V$. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} (\zeta-1)^\lambda = 0 &\Rightarrow (\zeta)^\lambda = 1 \Rightarrow (\zeta^{-1})^\lambda = 1, \\ (a(\zeta-1))^\lambda = 0 &\Rightarrow ((a(\zeta-1))\zeta^{-1})^\lambda = 0 = (a(1-\zeta^{-1}))^\lambda. \end{aligned}$$

Weiter ist $((\zeta-1)a)^\lambda = 0$, also auch das Produkt:

$$\begin{aligned} 0 &= ((a(1-\zeta^{-1}))((\zeta-1)a))^\lambda = (a((1-\zeta^{-1})(\zeta-1))a)^\lambda = \\ &= (a((\zeta-1)-\zeta^{-1}(\zeta-1))a)^\lambda = (a(\zeta-1)a - a(\zeta^{-1}(\zeta-1))a)^\lambda. \end{aligned}$$

Der erste Summand wird auf Null abgebildet, also auch der zweite:

$$0 = (a(\zeta^{-1}(\zeta-1))a)^\lambda = (a(1-\zeta^{-1})a)^\lambda = (a(\zeta^{-1}-1)a)^\lambda,$$

also ist $\zeta^{-1} \in 1+U$.

Der Beweis des zweiten Teils des Satzes kann genauso geführt werden wie der von Satz 1.20., wenn man berücksichtigt, daß

$${}_aV_a(0) = a^{-1} \cdot (\{0\})^{\lambda^{-1}} \cdot a^{-1}$$

gilt. □

Vergleicht man die Definition 3.8. der Topologie T_λ mit Lemma 1.19., so sieht man, daß im Fall einer normalen Stelle die Stellentopologie mit der Bewertungstopologie übereinstimmt. Wie Satz 3.11. zeigt, lassen sich aber auch Schiefkörper mit nicht normaler Stelle zu topologischen Schiefkörpern machen, ohne daß, wie bei den Mathiakschen Bewertungstopologien, noch weitere Forderungen an den Bewertungsring gestellt werden müssen. Dies ist ein unabhängig von der Geometrie interessantes Ergebnis.

Die Stellentopologie von Moufangebenen und desarguesschen Ebenen

Nun läßt sich analog zu Satz 2.14. zeigen, daß die Fortsetzung der Stellentopologie des Alternativkörpers bzw. des Schiefkörpers K auf die durch K koordinatisierte Ebene gerade die Stellentopologie der Ebene ist.

Satz 3.12. *Es sei (E, T_λ) eine Moufangebene oder eine desarguessche projektive Ebene mit Stellentopologie T_λ . Dann ist T_λ nicht diskret und E ist eine topologische Ebene. Ist K ein Koordinatenkörper, auf dem $\lambda|K$ eine Stelle ist, so stimmt die Einschränkung von T_λ auf K mit der Stellentopologie von K bezüglich der Stelle $\lambda|K$ überein.*

Beweis.

Die Stellentopologie des Ternärkörpers K bezüglich $\lambda|K$ sei mit T_K bezeichnet, T sei die nach Satz 1.11. für Moufangebenen eindeutig bestimmte Fortsetzung von T_K auf E . Es ist T_K die größte Topologie auf K , in der Urbilder von Punkten offen sind und die Verknüpfungen partiell stetig sind. Nach Satz 2.11. ist also $T_\lambda|K$ feiner als T_K , und aus Lemma 2.13. folgt, daß auch T_λ feiner als T ist. Wie im Beweis zu 2.14. schließt man, daß bezüglich T Urbilder von Punkten offen und Zentralprojektionen stetig sind. Also ergibt sich aus Satz 2.12., daß auch T feiner als T_λ ist. $\square$

Eine Darstellung der Topologie durch zentrale Kollineationen

In Moufangebenen, desarguesschen Ebenen und papposschen Ebenen operiert die Menge der zentralen Kollineationen transitiv auf dem Punktraum und auf dem Geradenraum. Durch diese Eigenschaft ergibt sich nun eine neue, einfachere

Darstellung der Stellentopologie, und es läßt sich eine uniforme Struktur angeben, welche die Stellentopologie erzeugt.

Definition 3.13. Sei (E, λ) eine Moufangebene oder eine desarguessche Ebene mit Epimorphismus λ . Sei Γ die Gruppe der projektiven Kollineationen¹⁾. Für $\gamma \in \Gamma$ sei

$$U_\gamma = \{(X, Y) \in P \times P : X^{\gamma\lambda} = Y^{\gamma\lambda}\},$$

$$V_\gamma = \{(x, y) \in G \times G : x^{\gamma\lambda} = y^{\gamma\lambda}\}.$$

Satz 3.14. Sei (E, λ) eine Moufangebene oder eine desarguessche Ebene mit Epimorphismus λ , sei Γ die Gruppe der projektiven Kollineationen. Die Mengen

$$\{U_\gamma : \gamma \in \Gamma\}, \{V_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$$

bilden Subbasen uniformer Strukturen auf P und G . Die zu diesen uniformen Strukturen gehörigen Topologien stimmen auf Punkt- und Geradenraum mit der Stellentopologie T_λ überein.

Beweis.

Es genügt, die Mengen $U_\gamma : \gamma \in \Gamma$ auf dem Punktraum zu betrachten. Daß diese Mengen eine Subbasis einer uniformen Struktur bilden, verifiziert man sofort wie in Lemma 2.2.. Zu zeigen bleibt, daß die davon erzeugte Topologie T mit T_λ übereinstimmt. Aufgrund der Charakterisierung der Stellentopologie in Satz 2.12. genügt es zu zeigen, daß T die grösste Topologie ist, bezüglich der Zentralprojektionen stetig sind, und Urbilder von Punkten offen sind. Für $P \in P$ und $\gamma \in \Gamma$ bilden die Mengen

$$U_\gamma(P) = \{X : X^{\gamma\lambda} = P^{\gamma\lambda}\}$$

eine Subbasis offener Mengen in T . Für $\gamma = \text{id}$ erkennt man, daß

¹⁾ Das ist die von den zentralen Kollineationen erzeugte Gruppe.

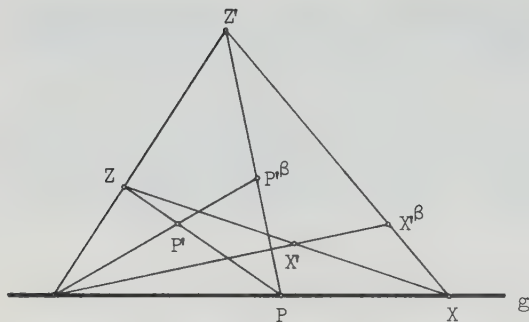


Abb. 3.2.

Nach 1. gibt es also eine zentrale Kollineation α mit

$$(U_{\alpha}(P^{\beta}))^{\tau} \subset U_{id}(P)ng.$$

Wegen $U_{id}(P)ng = (U_{id}(P)ng)^{\beta}$ und $\beta^{-1}\sigma = \tau\beta^{-1}$ gilt also auch

$$U_{\alpha}(P^{\beta})\beta^{-1}\sigma \subset U_{id}(P)ng.$$

Nun ist

$$U_{\alpha}(P^{\beta})\beta^{-1} = \{X\beta^{-1} : X\alpha\lambda = P^{\beta}\alpha\lambda\} = \{X : X\beta\alpha\lambda = P^{\beta}\alpha\lambda\} = U_{\beta\alpha}(P')$$

und daher

$$U_{\beta\alpha}(P')^{\sigma} \subset U_{id}(P)ng.$$

3. Sei jetzt $\gamma \neq id$, Z beliebig mit $Z \notin g$. Betrachte das Bild der Ebene unter γ . Dann ist:

$$(U_{\gamma}(P)ng)^{\gamma} = U_{\gamma}(P)^{\gamma}ng^{\gamma} = U_{id}(P^{\gamma})ng^{\gamma}.$$

Es ist $\tau = \gamma^{-1}\sigma\gamma$ die Zentralprojektion mit Zentrum Z^{γ} auf g^{γ} , dabei ist $P'^{\gamma}\tau = P'^{\sigma}\gamma = P^{\gamma}$.

Nach 2. gibt es eine Umgebung $U_{\alpha}(P'^{\gamma})$ mit

$$U_{\alpha}(P'^{\gamma})^{\tau} \subset U_{id}(P^{\gamma})ng^{\gamma} = (U_{\gamma}(P)ng)^{\gamma}.$$

Wegen $U_{\alpha}(P'Y)Y^{-1} = U_{Y\alpha}(P')$ und $Y^{-1}\sigma = \tau Y^{-1}$ ist damit

$$U_{Y\alpha}(P')^{\sigma} = U_{\alpha}(P'Y)Y^{-1}\sigma = U_{\alpha}(P'Y)^{\tau}Y^{-1} \in U_Y(P) \cap g,$$

was zu zeigen war. □

Satz 3.15. *Bezüglich der in Satz 3.14. definierten uniformen Strukturen sind zentrale Kollineationen gleichmäßig stetig. Auf jeder Geraden g und auf jedem Büschel $\overset{*}{G}$ wird die uniforme Struktur U_g bzw. U_G induziert (vgl. 2.2.), also sind auch Projektivitäten gleichmäßig stetig.*

Beweis.

Es genügt wieder, den Punktraum zu untersuchen. Die zentrale Kollineation τ ist gleichmäßig stetig, denn ist U_Y gegeben, so gilt:

$$(X, Y) \in U_{\tau Y} \Rightarrow (X^{\tau}, Y^{\tau}) \in U_Y.$$

Da projektive Kollineationen auf Geraden Projektivitäten induzieren und da in Moufang Ebenen, wie man leicht sieht, jede Projektivität zwischen Geraden zu einer projektiven Kollineation fortgesetzt werden kann, folgt der zweite Teil der Behauptung unmittelbar durch Vergleich der Definitionen 2.1. und 3.13.. □

4. Angeordnete Ebenen mit ordnungsverträglichen Epimorphismen

Aus der Bewertungstheorie ist der folgende Satz bekannt:
Ist (K, v) ein angeordneter Körper mit ordnungsverträglicher Bewertung, so ist die Bewertungstopologie gleich der Ordnungstopologie von K . (siehe Prieß-Crampe [22], S.42.) Die Bewertung des Körpers K ist genau dann ordnungsverträglich, wenn die zugehörige kanonische Stelle ordnungstreu ist. Der Zusammenhang zwischen ordnungsverträglichen Epimorphismen (kurz o-Epimorphismen) und o-Stellen von Ternärkörpern legt es nahe, die Stellentopologien einer angeordneten Ebene mit der Ordnungstopologie zu vergleichen. Im Fall von o-Epimorphismen stellt sich heraus, daß diese Topologien übereinstimmen; das Ergebnis aus der Bewertungstheorie läßt sich also übertragen.

Grundbegriffe

Zur Herleitung des angekündigten Satzes müssen zunächst einige Grundbegriffe über angeordnete Ebenen und o-Epimorphismen angeordneter Ebenen gebracht werden. Als Quelle hierzu sei auf Prieß-Crampe [22], Kap. V, §§1,2 und 4 verwiesen.

Definition 4.1. Sei E eine projektive Ebene, g eine Gerade. Eine *Trennbeziehung* auf g ist eine quaternäre Relation $|$, welche für alle P, Q, R, S, T die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (T1) Aus $PQ|RS$ folgt P, Q, R, S sind voneinander verschieden.
- (T2) Aus $PQ|RS$ folgt $QP|RS$ und $RS|PQ$.
- (T3) Aus $PQ|RS$ folgt $PR|QS$ ist falsch.
- (T4) Sind P, Q, R, S verschieden, so gilt $PQ|RS$ oder $PS|QR$ oder $PR|QS$.
- (T5) Aus $PQ|RS$ und $QR|ST$ folgt $RS|TP$.

Die Ebene E heißt *angeordnet*, wenn auf jeder Geraden mindestens vier Punkte liegen und auf jeder Geraden eine Trennbeziehung erklärt ist, die gegenüber Perspektivitäten invariant ist.

Sei K ein Ternärkörper der projektiven Ebene E . K heißt *angeordneter Ternärkörper*, wenn auf K eine Anordnung $<$ erklärt ist, bezüglich der gilt:

(M1) Aus $b_1 < b_2$ folgt $T(a, x, b_1) < T(a, x, b_2)$.

(M2) Sei x_S durch $T(a_1, x_S, b_1) = T(a_2, x_S, b_2)$ bestimmt.

Aus $a_1 < a_2$, $x_S < x$ folgt $T(a_1, x, b_1) < T(a_2, x, b_2)$,

aus $a_1 < a_2$, $x < x_S$ folgt $T(a_2, x, b_2) < T(a_1, x, b_1)$.

Satz 4.2. Ist E eine angeordnete projektive Ebene und K ein Ternärkörper zu E , dann wird durch die Trennbeziehung $|$ von $K \cup \{\infty\}$ auf K ein Paar von zueinander dualen Anordnungen induziert. In der Anordnung, in der $0 < 1$ gilt, ist K ein angeordneter Ternärkörper. Es gilt:

$$A < B < C \text{ oder } C < B < A \iff AC | B\infty.$$

□

Ist E eine angeordnete Ebene, so sind gleichzeitig die Geradenbüschel mit einer Trennbeziehung versehen. Diese wird von den Punktreihen durch Perspektivitäten induziert. Angeordnete Ebenen sind topologische Ebenen, eine Basis der Ordnungstopologie bilden die konvexen Vierecke:

Definition und Satz 4.3. Sei E eine angeordnete projektive Ebene, g eine Gerade. Für verschiedene Punkte $A, B, C | g$ sei

$$(AB)_C = \{X | g : AB | XC\}.$$

Es gilt:

$$(A,B)_C = (A,B)_D \iff D \neq A,B \text{ und } D \notin (A,B)_C,$$

$$(A',B')_C \subset (A,B)_C \iff A',B' \in (A,B)_C \cup \{A,B\}.$$

Die Intervalle $(A,B)_C$, $A,B,C \in g$ bilden eine Basis einer Topologie auf g .

Seien $U,V \in P$, $a_1, a_2 \in \bar{U}$, $b_1, b_2 \in \bar{V}$ jeweils verschiedene Elemente. Durch U,V,a_1,a_2,b_1,b_2 ist ein konvexes Viereck V in P bestimmt durch

$$P \in V \iff PV, UV \mid b_1, b_2 \text{ und } PU, UV \mid a_1, a_2.$$

Die konvexen Vierecke in P bilden eine Topologiebasis in P . Mit der dualen Topologie auf G ist E eine topologische projektive Ebene. Diese Topologie heißt *Ordnungstopologie* von E .

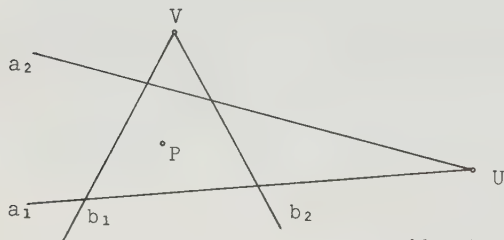


Abb. 4.1.

Es kann nun ein Hilfssatz formuliert werden, der für den Beweis des Satzes, daß die Stellentopologie eines o-Epimorphismus mit der Ordnungstopologie übereinstimmt, wesentlich ist.

Lemma 4.4. Sei E eine angeordnete projektive Ebene. Ein konvexes Viereck V sei gegeben durch $U,V \in P$, $a_1, a_2 \in \bar{U}$, $b_1, b_2 \in \bar{V}$. Sei $P \in V$. Dann gilt: Es gibt eine Gerade $h \cap P$, $h \cap V$ mit

$$(h \cap a_1, h \cap a_2)_{UV \cap h} \subset (h \cap b_1, h \cap b_2)_{UV \cap h}.$$

(Vgl. Abb. 4.2...)

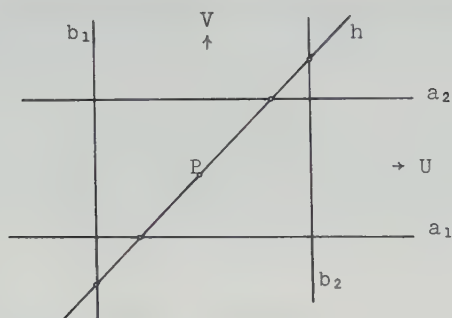


Abb. 4.2.

Beweis.

Es seien $A_1 = a_2 \cap b_2$, $A_2 = a_1 \cap b_1$, und für $i = 1, 2$ sei $g_i = A_i P$, $S_i = a_i \cap g_i$, $T_i = b_i \cap g_i$. Der Punkt $g_i \cap UV$ sei für $i = 1, 2$ mit ∞ bezeichnet (Abb. 4.3.).

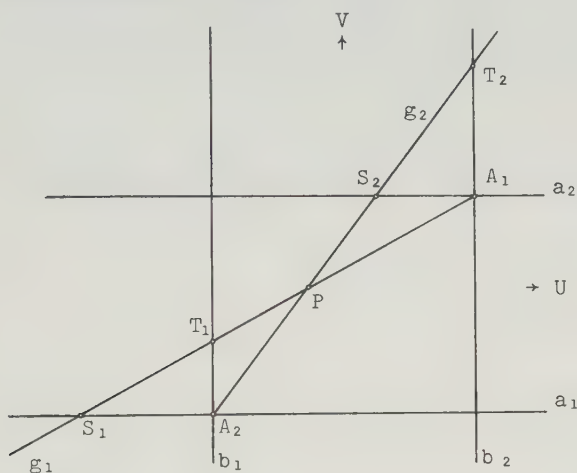


Abb. 4.3.

Ist $g_1 = A_1 A_2$, so kann $h = g_1$ gesetzt werden, denn dann ist $h \cap a_i = h \cap b_i$ für $i = 1, 2$, und die Behauptung ist erfüllt. Sei also $g_1 \neq A_1 A_2$. $P \in V$ heißt dann

$$S_1 A_1 | P^\infty \text{ und } T_1 A_1 | P^\infty.$$

Auf g_1 gilt dann entweder $PT_1|A_1S_1$ oder $PS_1|A_1T_1$. Denn sei $S_1T_1|A_1P$. Wegen $T_1A_1|P^\infty$ wäre nach (T5) $A_1P|^\infty S_1$ im Widerspruch zu $S_1A_1|P^\infty$.

1. $PT_1|A_1S_1$.

Wegen $^\infty P|T_1A_1$ folgt wieder nach (T5): $T_1A_1|S_1^\infty$, und wird $h = g_1$ gesetzt, so ist das die Behauptung nach 4.3..

2. $PS_1|A_1T_1$.

Nach Projektion von g_1 auf a_2 mit Zentrum A_2 folgt $S_2U|A_1, a_1 \cap b_2$. Durch Projektion von V auf g_2 ergibt sich daraus $S_2^\infty|T_2A_2$, und das ist die Behauptung, wenn $h = g_2$ gesetzt wird. □

Definition 4.5. Es seien E, E' angeordnete Ebenen und sei $\lambda: E \rightarrow E'$ ein Epimorphismus. λ heißt *ordnungstreu* (oder *o-Epimorphismus*), wenn für vier Punkte P, Q, R, S mit verschiedenen Bildern unter λ aus $PQ|RS$ stets $P^\lambda Q^\lambda|R^\lambda S^\lambda$ folgt.

Seien K, K' angeordnete Ternärkörper und sei $\lambda: K \rightarrow K' \cup \{\infty\}$ eine Stelle. λ heißt *ordnungstreu* (oder *o-Stelle*), wenn für alle $a, b \in K$ gilt:

aus $a^\lambda, b^\lambda \neq \infty$ und $a < b$ folgt $a^\lambda \leq b^\lambda$,
aus $0 < a < b$ und $a^\lambda = \infty$ folgt $b^\lambda = \infty$.

Satz 4.6. Es seien E, E' angeordnete Ebenen und $\lambda: E \rightarrow E'$ ein Epimorphismus. Es sei K ein Ternärkörper, so daß $\lambda|K$ eine Stelle ist. Dann ist λ ein o-Epimorphismus genau dann, wenn $\lambda|K$ eine o-Stelle ist. □

Die Stellentopologie zu einem o-Epimorphismus

Es wird nun ein Mengensystem im Punktraum definiert, das sich im Fall angeordneter Ebenen mit o-Epimorphismus als Basis der Stellentopologie erweisen wird. Dual dazu kann die Stellentopologie des Geradenraumes beschrieben werden.

Definition 4.7. Es sei (E, λ) eine projektive Ebene mit Epimorphismus λ . Seien $U, V, P \in P$ so gewählt, daß $U^\lambda, V^\lambda, P^\lambda$ ein echtes Dreieck bilden. Sei $l \in G$ mit $P \in l$ und $V^\lambda \neq l^\lambda$ (Abb. 4.4. und 4.5.). Für $h \in \tilde{P}$ mit $h \neq V$ sei

$$V_{Vh}^1(P) = \{X \in l : (VX \cap h)^\lambda = P^\lambda\},$$

und für $g, h \in \tilde{P}$, $g \neq U$, $h \neq V$ sei

$$V_{VhUg}^1(P) = \{X \in P : X^\lambda = P^\lambda = (VX \cap h)^\lambda = (UX \cap g)^\lambda\}.$$

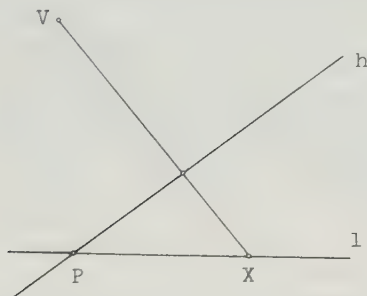


Abb. 4.4.

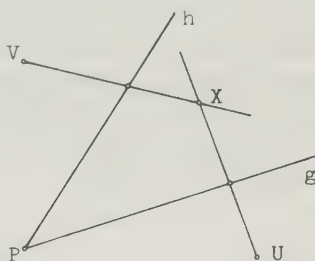


Abb. 4.5.

Ist σ die Perspektivität von l auf h mit Zentrum V , so gilt:

$$V_{Vh}^1(P) = V_\sigma^1(P)$$

(vgl. Definition 2.1.). Die Mengen $V_{Vh}^1(P)$ sind also in der auf l von der Stellentopologie T_λ induzierten Topologie offen.

Lemma 4.8. *Es sei (E, λ) eine Ebene mit Epimorphismus λ , es sei O, E, U, V ein Viereck, das durch λ auf ein echtes Viereck abgebildet wird. In den zu O, E, U, V gehörigen Koordinaten gilt für $1 = OE$:*

$$V_{VhUg}(O) = V_{Vh}^1(O) \times V_{Ug}^1(O)$$

und es ist

$$V_{V1U1}(O) = \{P : P^\lambda = O^\lambda\}.$$

Beweis.

Sei dazu $Q = (Q_x, Q_y)$. Wegen $VQ = VQ_x$, $UQ = UQ_y$ folgt:

$$\begin{aligned} Q \in V_{VhUg}(O) &\iff (VQ \cap h)^\lambda = (UQ \cap g)^\lambda = O^\lambda, \quad Q^\lambda = O^\lambda \iff \\ (VQ_x \cap h)^\lambda = O^\lambda &= (UQ_y \cap g)^\lambda \iff Q_x \in V_{Vh}^1(O), \quad Q_y \in V_{Ug}^1(O). \end{aligned}$$

Der zweite Teil der Behauptung ergibt sich unmittelbar aus

$$V_{V1}^1(O) = \{P1 : P^\lambda = O^\lambda\}.$$

□

Lemma 4.9. *Die Stellentopologie T_λ einer Ebene E mit Epimorphismus λ ist auf dem Punktraum feiner als die von den Mengen $V_{VhUg}(P)$ aus Definition 4.7. erzeugte Topologie. Die gleiche Aussage gilt auf dem Geradenraum bezüglich der zu $V_{VhUg}(P)$ dual gebildeten Mengen.*

Beweis.

Da die Mengen $V_{Vh}^1(P)$ wie schon bemerkt bezüglich der Topologie $T_\lambda|1$ offen sind, folgt nach Lemma 2.8. und nach Satz 2.9.6., daß auch die Mengen $V_{VhUg}(P)$ in der Stellentopologie offen sind.

□

Ein letztes Lemma muß dem Beweis des Hauptsatzes dieses Kapitels noch vorangestellt werden.

Lemma 4.10. Sei $\lambda : E \rightarrow E'$ ein σ -Epimorphismus angeordneter Ebenen, sei g eine Gerade von E .

1. Seien $P, Q \in g$ mit $P^\lambda \neq Q^\lambda$. Dann gibt es $R, S \in g$ mit $PQ \parallel RS$ und $P^\lambda = R^\lambda = S^\lambda$.
2. Seien P, Q, R, S Punkte mit $PR \parallel SQ$ und $P^\lambda = R^\lambda \neq Q^\lambda$. Dann gilt $P^\lambda = S^\lambda$.
3. Sei $(X_1, X_2)_V$ ein Intervall auf g und $P \in (X_1, X_2)_V$. Dann gibt es Y_1, Y_2, W mit $P \in (Y_1, Y_2)_W \subset (X_1, X_2)_V$ und $P^\lambda = Y_1^\lambda = Y_2^\lambda \neq W^\lambda$.

Beweis.

Zu 1.: Es kann E durch einen Ternärkörper K so koordinatisiert werden, daß $P = 0 \in K$, $Q = (1)$ und $\lambda|_K$ eine σ -Stelle ist. Nach Satz 1.4. gibt es ein $R \in K$ mit $R \neq P$ und $R^\lambda = P^\lambda$. Sei $S \in K$ mit $S+R = 0$. Dann ist auch $S^\lambda = P^\lambda$ und ist etwa $R > 0$, so folgt $S < 0$ und damit $RS \parallel PQ$.

Zu 2.: In der gleichen Koordinatisierung wie oben gilt $P < S < R$ oder $R < S < P$. Dann folgt $P^\lambda \leq S^\lambda \leq R^\lambda$ oder $R^\lambda \leq S^\lambda \leq P^\lambda$, also die Behauptung.

Zu 3.: Zunächst wird gezeigt, daß es ein Intervall $(Z_1, Z_2)_W$ mit $P \in (Z_1, Z_2)_W \subset (X_1, X_2)_V$ und mit $P^\lambda \neq W^\lambda$ gibt. Wähle dazu W mit $W^\lambda \neq P^\lambda$ und X'_1, X'_2 , so daß $P \in (X'_1, X'_2)_W$ gilt. Es gibt Z_1, Z_2 und U , so daß

$$P \in (X'_1, X'_2)_W \cap (X_1, X_2)_V = (Z_1, Z_2)_U$$

gilt, da die Intervalle eine Topologiebasis bilden. Da $W \notin (Z_1, Z_2)_U$ ist, folgt nach 4.3. $(Z_1, Z_2)_W = (Z_1, Z_2)_U$.

Nun kann E durch einen Ternärkörper K so koordinatisiert werden, daß $P = 0$, $W = (1)$ und $\lambda|_K$ eine Stelle ist. In K gelte o.B.d.A. $Z_1 < P < Z_2$. Ist $Z_1^\lambda = P^\lambda = Z_2^\lambda$, so kann $Y_1 = Z_1$, $Y_2 = Z_2$ gesetzt werden. Ist etwa $Z_1^\lambda \neq P^\lambda = Z_2^\lambda$, so setze $Y_2 = Z_2$ und Y_1 mit $Y_1 + Y_2 = 0$. Dann ist auch $Y_1^\lambda = 0^\lambda = P^\lambda$ und $Z_1 < Y_1 < P < Y_2 = Z_2$,

also $(Y_1, Y_2)_W \subset (Z_1, Z_2)_W$. Ist schließlich $Z_1^\lambda \neq P^\lambda \neq Z_2^\lambda$, so gibt es nach 1. Y_1, Y_2 mit $Y_1^\lambda = P^\lambda = Y_2^\lambda$, und es folgt $Z_1 < Y_1 < Z_2$ und $Z_1 < Y_2 < Z_2$, also wieder $(Y_1, Y_2)_W \subset (Z_1, Z_2)_W$. $\square$

Nun kann gezeigt werden, daß die Mengen $V_{Vh}^1(P)$ aus Definition 4.7. eine Basis der Ordnungstopologie auf der Geraden l bilden. Die Mengen $V_{VhUg}^1(P)$ sind also Basis der Ordnungstopologie des Punktraumes und aus Lemma 4.9. läßt sich dann schließen, daß Ordnungs- und Stellentopologie übereinstimmen.

Satz 4.11. Sei $\lambda : E \rightarrow E'$ ein σ -Epimorphismus angeordneter Ebenen, sei $g \in G$ und PIg . Die Mengen

$$V_{Vh}^g(P) : PIh, V\ddot{I}h$$

bilden für jeden Punkt V mit $V^\lambda \notin g^\lambda$ eine Umgebungsbasis von P in der Ordnungstopologie auf g .

Beweis.

Es genügt zu zeigen:

1. Jedes $V_{Vh}^g(P)$ enthält ein offenes Intervall J mit $P \in J$.
2. Jedes offene Intervall J mit $P \in J$ enthält ein $V_{Vh}^g(P)$.

Zu 1.: (Abb. 4.6.) Sei $V_{Vh}^g(P)$ gegeben. Sei WIg mit $W^\lambda \neq P^\lambda$, $U = VW \cap h$. Dann ist auch $U^\lambda \neq P^\lambda$. Nach 4.10.1. gibt es $Q_1, Q_2 Ih$ mit $Q_1^\lambda = Q_2^\lambda = P^\lambda$ und

$PU|Q_1Q_2$. Sei $X_i = VQ_i \cap g$

für $i = 1, 2$. Es gilt

$X_i^\lambda = g^\lambda \cap (VQ_i)^\lambda = P^\lambda$ und

$PW|X_1X_2$, also $P \in (X_1, X_2)_W$.

Dann ist

$$(X_1, X_2)_W \subset V_{Vh}^g(P).$$

Denn $Y \in (X_1, X_2)_W$ heißt

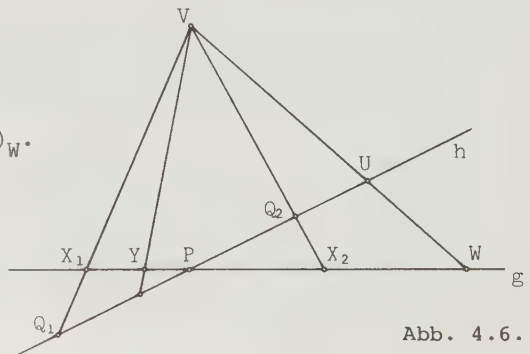


Abb. 4.6.

$X_1 X_2 | YW$, also $Q_1 Q_2 | VY \cap h, U$, nach 4.10.2. damit $(VY \cap h)^\lambda = P^\lambda$.

Zu 2.: (Abb. 4.7.) Sei $(X_1, X_2)_W$ vorgegeben und $P \in (X_1, X_2)_W$. Nach 4.10.3. kann $X_1^\lambda = X_2^\lambda = P^\lambda \neq W^\lambda$ angenommen werden. Nach 4.10.2. gilt für alle $Y \in (X_1, X_2)_W$ also $Y^\lambda = P^\lambda$.

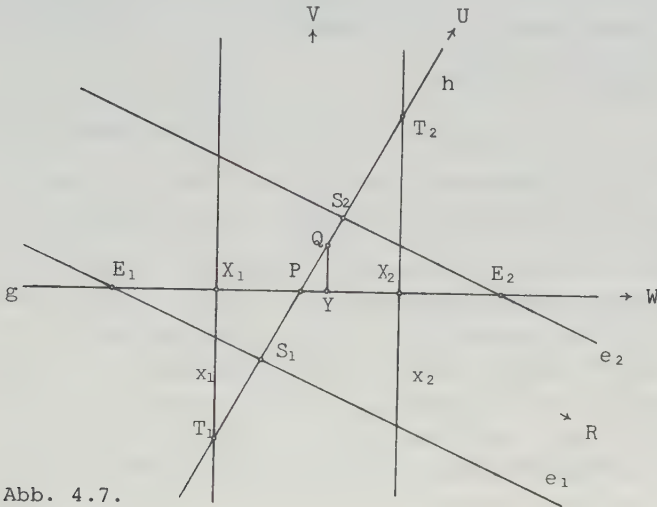


Abb. 4.7.

Seien nun $E_1, E_2 \in g$ und $E_1^\lambda, E_2^\lambda, P^\lambda, W^\lambda$ paarweise verschieden. (Diese Wahl ist möglich, da E' angeordnet ist.) Eine Vertauschung der Punkte E_1, E_2, W ändert nach 4.3. das Intervall $(X_1, X_2)_W$ nicht, es kann also o.B.d.A. angenommen werden, daß $WP | E_1 E_2$ gilt.

Nun sei $R \in VW$, $R^\lambda \neq V^\lambda, W^\lambda$ und für $i = 1, 2$ sei $e_i = RE_i$, $x_i = VX_i$. Durch R, V, e_1, e_2, x_1, x_2 wird ein konvexes Viereck bestimmt und wegen $WP | E_1 E_2$, $WP | X_1 X_2$ liegt P in diesem Viereck. Nach 4.4. gibt es also eine Gerade $h \cap P$, $h \nsubseteq V$, so daß für $S_i = h \cap e_i$, $T_i = h \cap x_i$, $i = 1, 2$ und $U = VW \cap h$ gilt:

$$(S_1, S_2)_U \subset (T_1, T_2)_U.$$

Sei jetzt $Y \in V_{Vh}(P)$, also für $Q = VY \cap h$ sei $Q^\lambda = P^\lambda$. Es genügt nun $Q \in (S_1, S_2)_U$ zu zeigen, denn dann ist $Q \in (T_1, T_2)_U$, also

$T_1 T_2 | QU$ und nach Projektion an V gilt $X_1 X_2 | YW$, das heißt $Y \in (X_1, X_2)_W$.

Die Punkte $S_1^\lambda, S_2^\lambda, P^\lambda, U^\lambda$ sind paarweise verschieden:

a) $S_1^\lambda \neq P^\lambda \neq S_2^\lambda$.

Aus $P^\lambda = S_i^\lambda$ würde wegen $e_i^\lambda \neq g^\lambda$ folgen:

$$E_i^\lambda = (g n e_i)^\lambda = g^\lambda n e_i^\lambda = P^\lambda.$$

b) $S_1^\lambda \neq U^\lambda \neq S_2^\lambda$.

Es ist $h^\lambda = (PV)^\lambda$, denn sonst würde $T_i^\lambda = (PV)^\lambda \cap h^\lambda = P^\lambda$ für $i = 1, 2$ und wegen $T_1 T_2 | S_1 U$ auch $S_1^\lambda = P^\lambda$ folgen. Nun gilt wegen $V^\lambda \neq R^\lambda$ für $i = 1, 2$:

$$S_i^\lambda = (PV)^\lambda \cap (E_i R)^\lambda \neq (VR)^\lambda,$$

und damit $S_i^\lambda \neq U^\lambda$ für $i = 1, 2$.

c) $S_1^\lambda \neq S_2^\lambda$.

Aus $S_1^\lambda = S_2^\lambda$ würde wegen $S_1 S_2 | PU$ nach 4.10.2. wieder $S_1^\lambda = P^\lambda$ folgen.

Wegen der Ordnungstreue von λ folgt nun aus $S_1 S_2 | PU$ also $S_1^\lambda S_2^\lambda | P^\lambda U^\lambda$. Wegen $Q^\lambda = P^\lambda$ gilt dann auch $S_1^\lambda S_2^\lambda | Q^\lambda U^\lambda$ und damit $S_1 S_2 | QU$, das heißt $Q \in (S_1, S_2)_U$. □

Satz 4.12. Sei $\lambda : E \rightarrow E'$ ein σ -Epimorphismus angeordneter Ebenen. Dann ist die Stellentopologie T_λ gleich der Ordnungstopologie. Eine Umgebungsbasis des Punktes P wird durch die Mengen $V_{VhUg}(P)$ aus Definition 4.7. gegeben.

Beweis.

Es genügt wieder, die Übereinstimmung der Topologien auf dem Punktraum zu zeigen. Die Ordnungstopologie sei mit T_o bezeichnet. Nach Lemma 4.8. und Satz 4.11. bilden in jedem Punkt die Mengen $V_{VhUg}(P)$ eine Basis der T_o -Umgebungen von P .

Es muß noch $T_\lambda = T_o$ gezeigt werden. Nach Lemma 4.9. ist die Stellentopologie feiner als die Ordnungstopologie. Nach 4.8. sind in der Ordnungstopologie Urbilder von Punkten offen. (E, T_o) ist eine topologische Ebene, es sind also Zentralprojektionen T_o -stetig; nach Satz 2.12. folgt daher die Übereinstimmung der Topologien. $\square$

Eine uniforme Struktur zur Stellentopologie

Da angeordnete Mengen immer vollständig regulär sind (siehe Kowalsky [14], 8.10., 8.11. und 18.7.), ist auch jede angeordnete affine Ebene vollständig regulär, und ähnlich wie in Satz 2.10. ausgeführt folgt, daß jede angeordnete projektive Ebene vollständig regulär und damit uniformisierbar ist. Dies ist jedoch eine reine Existenzaussage. Aus der gefundenen Darstellung der Ordnungstopologie einer Ebene mit o -Epimorphismus läßt sich direkt eine Subbasis einer uniformen Struktur ableiten. Zunächst sei dazu bemerkt, daß für jeden Punkt P die Mengen

$$\tilde{V}_{Vh}(P) = \{Q \in P : P^\lambda = Q^\lambda = (VQ \cap h)^\lambda\} : V^\lambda \neq P^\lambda, h \in \tilde{P}, h \nsubseteq V,$$

eine Subbasis des Umgebungssystems von P bilden. Denn nach Definition 4.7. gilt für Punkte U, V, P für die $U^\lambda, V^\lambda, P^\lambda$ ein echtes Dreieck bilden, und für Geraden $g, h \in \tilde{P}$ mit $g \nsubseteq U, h \nsubseteq V$ offenbar

$$V_{VhUg}(P) = \tilde{V}_{Vh}(P) \cap \tilde{V}_{Ug}(P).$$

Stellt man h durch die Verbindungsgerade von P mit einem Punkt U in h dar, so zeigt sich, daß die folgende Definition die gewünschte uniforme Struktur liefert:

Definition 4.13. Es sei $\lambda : E \rightarrow E'$ ein α -Epimorphismus angeordneter Ebenen. Für verschiedene Punkte U, V von E sei:

$$U_{VU} = \{(P, Q) : UV^\lambda \nsubseteq P^\lambda = Q^\lambda = (VQ \cap UP)^\lambda\} \cup \{(P, Q) : P^\lambda = Q^\lambda IUV^\lambda\},$$

$$U_{VU}(P) = \{Q : (P, Q) \in U_{VU}\}.$$

Satz 4.14. Unter den Voraussetzungen der Definition 4.13. bilden die Mengen U_{VU} eine Subbasis einer uniformen Struktur auf P . Die zu dieser uniformen Struktur gehörige Topologie ist die Stellentopologie T_λ .

Beweis.

Die Übereinstimmung mit der Stellentopologie ist schnell zu sehen: Sei $U_{VU}(P)$ gegeben.

Ist $P^\lambda IUV^\lambda$, so ist $U_{VU}(P) = \{Q : Q^\lambda = P^\lambda\}$, also offen in T_λ .

Ist $P^\lambda \nsubseteq UV^\lambda$, so gilt insbesondere $U^\lambda \neq P^\lambda \neq V^\lambda$ und für $h = PU$ ist

$$U_{VU}(P) = \tilde{V}_{Vh}(P).$$

Ist umgekehrt $\tilde{V}_{Vh}(P)$ gegeben, so sei g eine Gerade mit gIV und $g^\lambda \nsubseteq P^\lambda$. Sei $U = g \cap h$. Dann ist

$$\tilde{V}_{Vh}(P) = U_{VU}(P).$$

Die Mengen U_{VU} erzeugen eine uniforme Struktur:

Die Diagonale liegt in jeder Menge und $U_{VU}^{-1} = U_{UV}$; es genügt also nachzurechnen:

$$\forall U_{VU} \exists U_{S_1 T_1}, U_{S_2 T_2} \text{ mit } (U_{S_1 T_1} \cap U_{S_2 T_2})^2 \subset U_{VU}.$$

Sei dazu U_{VU} gegeben. Sei $R I UV$ mit $R^\lambda \neq U^\lambda, V^\lambda$ und $W I UV$ mit $UV \nsubseteq WR$. Dann gilt:

$$(U_{WU} \cap U_{VW})^2 \subset U_{VU}.$$

Gezeigt wird sogar:

$$AZ|FR \Rightarrow AP|TU \text{ (Projektion von W),}$$

$$ZB|FR \Rightarrow QB|TV \text{ (Projektion von W),}$$

in beiden Fällen also nach Lemma 4.10.2.: $T^\lambda = P^\lambda = Q^\lambda$.

Zu 2.: Sei $S = WB \cap UX$.

$$AZ|BR \Rightarrow AP|SU \text{ (Projektion von W),}$$

$$UV|WR \Rightarrow UT|SA \text{ (Projektion von B),}$$

aus der ersten Zeile folgt $S^\lambda = A^\lambda$, aus der zweiten damit $T^\lambda = A^\lambda$.

Zu 3.: Sei $S' = WA \cap VY$:

$$BZ|AR \Rightarrow BQ|S'V \text{ (Projektion von W),}$$

$$UV|WR \Rightarrow VT|S'B \text{ (Projektion von A),}$$

wie in 2. folgt $S'^\lambda = B^\lambda$ und damit $T^\lambda = B^\lambda$.

Ist jetzt etwa $X = Z$, so gilt $(X, Y) \in U_{VW}$, woraus $S'^\lambda = Y^\lambda$ und wegen $VT|S'B$ auch $T^\lambda = B^\lambda$ folgt. Ebenso hat $Y = Z$ zur Folge: $T^\lambda = A^\lambda$.

Als letztes bleibt der Fall zu behandeln, daß einer der drei Punkte $X^\lambda, Y^\lambda, Z^\lambda$ auf UV^λ liegt. Dann gilt aber $X^\lambda = Y^\lambda = Z^\lambda \in UV^\lambda$ und somit $(X, Y) \in U_{VU}$. □

5. Verallgemeinerte Moulton Ebenen

Epimorphismen von verallgemeinerten Moulton Ebenen wurden ausführlich untersucht. Es liegt daher nahe, die davon induzierten Stellentopologien zu betrachten. Dabei ergibt sich, daß verallgemeinerte Moulton Ebenen mit Epimorphismen bezüglich der Stellentopologie topologische Ebenen sind. Die Stellentopologie einer solchen Ebene läßt sich genau charakterisieren.

Epimorphismen von Moulton Ebenen

Definition 5.1. Sei K ein angeordneter Schiefkörper, seien $d, k \in K$ mit $d \leq 0 < k \neq 1$. In K wird eine neue Multiplikation $\circ$ definiert durch

$$a \circ b = \begin{cases} (ak + d(1-k))b & \text{falls } a < d, b < 0, \\ ab & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Menge $K(+, \circ)$ wird mit $K_{k,d}$, und falls $d = 0$ ist, mit K_k bezeichnet. K_k ist eine Cartesische Gruppe ([21], S.93), die darüber gebildeten Ebenen heißen *verallgemeinerte Moulton Ebenen* oder *M-Ebenen*. K_k heißt auch *Cartesische M-Gruppe* oder nur *M-Gruppe*.

M-Ebenen sind angeordnete Ebenen und als solche topologische projektive Ebenen. Sie liegen in der Lenz-Klasse III (Yaqub [33]). Bislang sind keine weiteren Beispiele von Ebenen dieser Klasse bekannt.

Der folgende Satz, der in dieser Form bei Panella [20], Lemma 4 zu finden ist, stellt den für das Weitere wesentlichen Zusammenhang zwischen M-Gruppen und den Systemen $K_{k,d}$ dar.

Satz 5.2. Sei E eine M -Ebene, (O, E, U, V) ein Koordinatensystem, so daß der zugehörige Ternärkörper eine M -Gruppe $K'_k, (+, \cdot)$ ist. Sei $P \in UV$ mit $P = (m)$ und $0 < m < 1$. Dann gibt es einen angeordneten Schiefkörper K und Elemente $k, d \in K$ mit $d < 0 < k \neq 1$, so daß gilt:

1. Der Ternärkörper zu dem Quadrupel (O, E, P, V) ist die Cartesische Gruppe $K_{k,d}(+, \circ)$; in den Koordinaten von $K_{k,d}$ ist $U = (d)$.
2. Die Abbildung

$$\begin{aligned} h : K &\longrightarrow K' \\ x &\longmapsto x - d \circ x \end{aligned}$$

ist ein $\circ$ -Isomorphismus von $K \rightarrow K'$ und gleichzeitig eine Projektivität von OE .

Der erste Teil des Satzes ist mit Lemma 4 von Panella identisch, der zweite Teil geht aus dem Beweis hervor: Die Abbildung $x \mapsto (1-d)x$ ist ein $\circ$ -Isomorphismus von K nach K' . Wegen $x - dx = x - d \circ x$ gilt die erste Behauptung. Weiter ist $x - d \circ x = (xU \cap OV)P \cap OE$ und daher eine Projektivität (Abb. 5.1.). $\square$

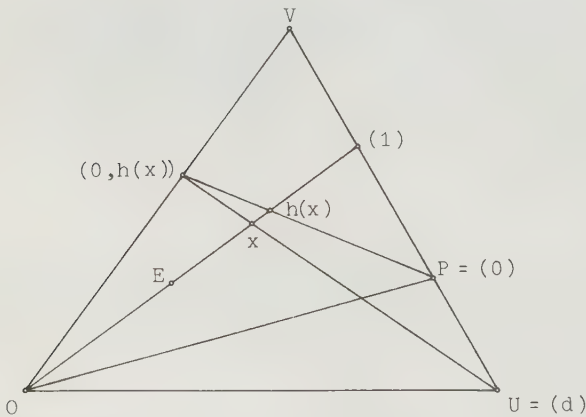


Abb 5.1.

André hat in [1] und [2] gezeigt, daß die verallgemeinerten Moulton Ebenen unter den angeordneten Ebenen schon durch Transitivitäts- und Semitransitivitätseigenschaften¹⁾ bezüglich einer festen Geraden u und eines festen Punktes U mit $U \notin u$ gekennzeichnet sind. M -Ebenen werden deshalb auch als (U, u) - M -Ebenen bezeichnet. Werden dann $O, V \in u$ und ein vierter Punkt E gewählt, so daß O, E, U, V ein echtes Viereck bilden, so ist der dazugehörige Koordinatenternärkörper eine M -Gruppe. Hieraus und aus Satz 5.2. ergibt sich:

Lemma 5.3. Sei E eine (U, u) - M -Ebene mit Epimorphismus λ . Ist $U^\lambda \notin u^\lambda$, so gibt es ein Quadrupel (O, E, U, V) , so daß der dazugehörige Ternärkörper eine M -Gruppe K_k ist und so, daß $\lambda|_{K_k}$ eine Stelle ist. Ist $U^\lambda \in u^\lambda$, so gibt es ein Quadrupel (O, E, U, V) , so daß der Ternärkörper dazu eine Cartesische Gruppe $K_{k,d}$ ist; $\lambda|_{K_{k,d}}$ ist eine Stelle mit $\lambda(d) = \infty$. □

Alle Epimorphismen von verallgemeinerten Moulton Ebenen sind also durch Stellen von M -Gruppen oder durch spezielle Stellen von Cartesischen Gruppen $K_{k,d}$ bestimmt. Die Stellen von M -Gruppen wurden von André [3] und Bartolozzi [5] bestimmt, die Stellen der Cartesischen Gruppen $K_{k,d}$ mit $\lambda(d) = \infty$ von Bartolone [4]. Es gilt:

Satz 5.4. (vgl. [5] Teorema 1.1. und [4] Teorema 1) Sei K ein angeordneter Schiefkörper, $d < 0 < k \neq 1$, K_k und $K_{k,d}$ die daraus wie in Definition 5.1. gebildeten Cartesischen Gruppen. Seien $\lambda : K_k \longrightarrow C_1 \cup \{\infty\}$ und $\mu : K_{k,d} \longrightarrow C_2 \cup \{\infty\}$ Stellen. Dann gilt für λ entweder

- a) C_1 ist ein Schiefkörper und $\lambda : K \longrightarrow C_1 \cup \{\infty\}$ ist eine Stelle des Schiefkörpers K ,

¹⁾ Zum Begriff der Semitransitivität siehe ebenfalls [1].

oder

b) C_1 ist eine M-Gruppe K'_{λ} über dem angeordneten Schiefkörper K' , und $\lambda : K \longrightarrow K' \cup \{\infty\}$ ist eine Stelle von K .

Für μ gilt:

Ist $\mu(d) = \infty$, so ist C_2 ein Schiefkörper und μ Stelle des Schiefkörpers K . □

Topologische Cartesische M-Gruppen

Für die Untersuchung der Stellentopologien von M-Ebenen soll zunächst gezeigt werden, daß sich eine Topologie T der M-Gruppe C zu einer Topologie der durch C koordinatisierten Ebene fortsetzen läßt, sofern T feiner als die Ordnungstopologie von C ist. Zur Vorbereitung dieses Satzes dienen die folgenden Lemmata.

Lemma 5.5. Sei $C = K_K$ eine M-Gruppe, T eine Topologie auf C , die feiner als die Ordnungstopologie ist. Dann ist K genau dann ein topologischer Schiefkörper, wenn C eine topologische Cartesische Gruppe ist.

Beweis.

Sei zunächst K als topologisch angenommen. Da $(C, +)$ eine topologische Gruppe ist, bleibt die Stetigkeit der folgenden Abbildungen zu untersuchen:

$$\begin{aligned} (x, y) &\longmapsto x \cdot y \\ (x, y) &\longmapsto y/x, \quad x \neq 0 \\ (x, y) &\longmapsto x \setminus y, \quad x \neq 0 \\ (p_1, p_2, v) &\longmapsto u \quad \text{mit } u \circ p_1 - u \circ p_2 = v, \quad p_1 \neq p_2 \\ (u_1, u_2, v) &\longmapsto p \quad \text{mit } u_1 \circ p - u_2 \circ p = v, \quad u_1 \neq u_2. \end{aligned}$$

Denn dann sind in dem Ternärkörper (C, T) mit $T(u, x, v) = ux + v$ sowohl T als auch die Umkehroperationen T_1, T_2, T_3 stetig.

Die Abbildung

$$(x, y) \longmapsto x \circ y = \begin{cases} xky & \text{falls } x < 0, y < 0 \\ xy & \text{sonst} \end{cases}$$

ist stetig auf den Mengen $\{(x, y) : x < 0, y < 0\}$ und $\{(x, y) : x > 0 \text{ oder } y > 0\}$, da diese Mengen offen sind und weil

$$(x, y) \longmapsto xky$$

$$(x, y) \longmapsto xy$$

stetige Abbildungen sind. Sei nun etwa $x = 0$. Dann gibt es zu jedem $W \in U(x \circ y)$ ein $U \in U(x)$ und ein $V \in U(y)$ mit $UV \subset W$ und mit $UkV \subset W$. Es ist also $U \circ V \subset W$.¹⁾

Für u mit $u \circ p_1 - u \circ p_2 = v$; $p_1 \neq p_2$ gilt:

$$u = \begin{cases} v(p_1 - p_2)^{-1} & \text{falls } v(p_1 - p_2)^{-1} > 0, \\ v(p_1 - p_2)^{-1} & \text{falls } p_1 > 0, p_2 > 0 \\ v(kp_1 - kp_2)^{-1} & \text{falls } p_1 < 0, p_2 < 0 \\ v(kp_1 - p_2)^{-1} & \text{falls } p_1 < 0, p_2 > 0 \\ v(p_1 - kp_2)^{-1} & \text{falls } p_1 > 0, p_2 < 0 \end{cases} \quad \text{und } v(p_1 - p_2)^{-1} < 0.$$

Die Abbildung $(p_1, p_2, v) \longmapsto u$ ist auf den fünf dadurch bestimmten Teilmengen von C^3 stetig, da diese offen sind. Zu untersuchen bleibt die Stetigkeit an den Nahtstellen.

Sei $v(p_1 - p_2)^{-1} = 0$, d.h. $u = v = 0$. Dann gibt es zu jedem $W \in U(u)$ Umgebungen $U_i \in U(p_i)$, $i = 1, 2$, $V \in U(v)$, so daß gilt:

Falls p_1, p_2 gleiches Vorzeichen haben, ist $0 \notin U_1 - U_2$ und $V(kU_1 - kU_2)^{-1} \subset W$, $V(U_1 - U_2)^{-1} \subset W$.

¹⁾ Es sei $U \circ V = \{x \circ y : x \in U, y \in V\}$. Entsprechend werden die Mengen $U/V, U^{-1}, \dots$ definiert.

Falls p_1, p_2 nicht gleiches Vorzeichen haben, ist $0 \notin k_1 U_1 - k_2 U_2$ und $V(k_1 U_1 - k_2 U_2)^{-1} \subset W$ für alle Paare $(k_1, k_2) \in \{1, k\} \times \{1, k\}$ gleichzeitig.

Damit ist die Stetigkeit für diesen Fall gezeigt. Sei nun $v(p_1 - p_2)^{-1} < 0$ und etwa $p_1 = 0$. Ist $p_2 < 0$, so gibt es zu W Umgebungen $U_i \in U(p_i)$, $i = 1, 2$, $V \in U(v)$, so daß gilt:

$$V(kU_1 - kU_2)^{-1} \subset W, \quad V(U_1 - kU_2)^{-1} \subset W;$$

und ist $p_2 > 0$, so gibt es Umgebungen, so daß gilt:

$$V(U_1 - U_2)^{-1} \subset W, \quad V(kU_1 - U_2)^{-1} \subset W.$$

u hängt also in jedem Falle stetig von p_1, p_2 und v ab. Analog sieht man, daß die Abbildung

$$(u_1, u_2, v) \longmapsto p \text{ mit } u_1 \circ p - u_2 \circ p = v, \quad u_1 \neq u_2$$

stetig ist.

Die Stetigkeit der Abbildungen $(x, y) \mapsto y/x$, $(x, y) \mapsto x \setminus y$ folgt aus den gerade durchgeführten Überlegungen, wenn $p_2 = 0$ bzw. $u_2 = 0$ gesetzt wird.

Sei jetzt $(C, +, \circ)$ topologisch. Da sich die Verknüpfung von K bestimmt durch

$$xy = \begin{cases} x \circ k^{-1} \circ y & \text{falls } x, y < 0 \\ x \circ y & \text{sonst,} \end{cases}$$

folgt die Stetigkeit der Abbildung $(x, y) \mapsto xy$ wie eben. Eine analoge Überlegung zeigt, daß

$$(x, y) \longmapsto yx^{-1} = \begin{cases} (y/x) \circ k & \text{falls } x < 0, y > 0 \\ y/x & \text{sonst} \end{cases}$$

für $x \neq 0$ stetig ist. Ebenso ist $(x, y) \mapsto x^{-1}y$ stetig und somit Lemma 5.5. vollständig bewiesen. □

Lemma 5.6. Sei $(K, T) = (C, T)$ eine topologische Cartesische Gruppe, sei T feiner als die Ordnungstopologie. Für $x, y \in C \cup \{\infty\}$ mit $x \neq 0$, $y \neq \infty$ werde gesetzt: $x0^{-1} = x/0 = 0^{-1}x = 0 \setminus x = x\infty = x \circ \infty = \infty x = \infty \circ x = \infty$ und $y\infty^{-1} = y/\infty = \infty^{-1}y = \infty \setminus y = 0$. Dann läßt sich T auf $C \cup \{\infty\}$ zu einer hausdorffschen Topologie fortsetzen, so daß die folgenden Abbildungen stetig sind:

$$\begin{array}{lcl} C \cup \{\infty\} \times C \cup \{\infty\} \setminus \{(0, \infty), (\infty, 0)\} & \longrightarrow & C \cup \{\infty\} \\ (1) \quad (x, y) & \longmapsto & xy \\ (2) \quad (x, y) & \longmapsto & x \circ y \\ \\ C \cup \{\infty\} \times C \cup \{\infty\} \setminus \{(0, 0), (\infty, \infty)\} & \longrightarrow & C \cup \{\infty\} \\ (3) \quad (x, y) & \longmapsto & yx^{-1} \\ (4) \quad (x, y) & \longmapsto & x^{-1}y \\ (5) \quad (x, y) & \longmapsto & y/x \\ (6) \quad (x, y) & \longmapsto & x \setminus y \end{array}$$

Beweis.

Umgebungen von ∞ seien die Mengen $U^1 = \{x^{-1} : x \in U \setminus \{0\}\} \cup \{\infty\}$, wo U eine Nullumgebung ist. Da $C(+, \cdot)$ ein topologischer Schiefkörper ist, sind (1), (3) und (4) stetig, wie man leicht nachrechnet.

Die Abbildung (5)

$$(x, y) \longmapsto y/x = \begin{cases} yx^{-1}k^{-1} & \text{falls } x < 0, y > 0 \\ yx^{-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

ist stetig auf $C^* \times C$. Sei jetzt $x = \infty$ und $y \neq \infty$. Zu jedem $W \in U(0)$ gibt es $U^1 \in U(x^{-1})$ und $V \in U(y)$ mit

$$VU^1 \subset W, VU^1 \subset Wk, \text{ also } VU^1k^{-1} \subset W$$

und damit

$$V/U \subset W.$$

Sei jetzt $x = 0$ und $y = \infty$. Zu jedem $W \in U(\infty)$ gibt es $U^1 \in U(x^{-1})$ und $V \in U(y)$ mit

$$VU^1 \subset W, VU^1 \subset Wk, \text{ also } VU^1k^{-1} \subset W$$

und damit wieder

$$V/U \subset W.$$

Ebenso folgt die Stetigkeit der Abbildung (6), und eine ähnliche Überlegung zeigt, daß (2) stetig ist. $\square$

Ein Topologiefortsetzungssatz

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß sich die Topologie T einer M -Gruppe C auf die zugehörige Ebene fortsetzen läßt, falls T feiner als die Ordnungstopologie ist. Hierzu müssen zunächst Umgebungen für die Punkte auf der unendlich fernen Geraden $[\infty]$ und für die Geraden des Büschels $(\infty)^*$ definiert werden. Die in der folgenden Definition beschriebenen Mengen werden sich hierzu als geeignet erweisen.

Definition 5.7. Sei $E = (P, G, I)$ eine projektive Ebene, koordinatisiert durch die Cartesische Gruppe C . Auf $C \cup \{\infty\}$ sei eine Topologie gegeben. Seien $x, y, u, v \in C$, $z, w \in C \cup \{\infty\}$, die Verknüpfungen mit 0 und ∞ seien definiert wie in Lemma 5.6..

Sei $p \in C$. Für $0 \notin U \in U(\infty)$, $\infty \notin V \in U(p)$ wird die Punktmenge $[U, V]_p$ definiert durch

$$(x, y) \in [U, V]_p \iff x \in U, y/x \in V,$$

$$(z) \in [U, V]_p \iff z \in V,$$

und die Geradenmenge $\langle U, V \rangle_p$ durch

$$[u, v] \in \langle U, V \rangle_p \iff u \in U, u \setminus (-v) \in V,$$

$$[w] \in \langle U, V \rangle_p \iff w \in V.$$

Seien $U, V \in U(\infty)$, $0 \notin U, V$. Die Punktmenge $[U, V]_\infty$ wird definiert durch

$$(x, y) \in [U, V]_\infty \iff y \in U, y/x \in V,$$

$$(z) \in [U, V]_\infty \iff z \in V,$$

und die Geradenmenge $\langle U, V \rangle_\infty$ durch

$$[u, v] \in \langle U, V \rangle_\infty \iff v \in U, u \setminus (-v) \in V,$$

$$[w] \in \langle U, V \rangle_\infty \iff w \in U.$$

Lemma 5.8. Sei $E = (P, G, I)$ eine Ebene über der Cartesischen Gruppe $C(+, \circ)$ und $E' = (P', G', I')$ die durch die duale Gruppe $C' = C(+, \cdot)$ mit $x \cdot y = y \circ x$ koordinatisierte Ebene. Dann ist E' zur dualen Ebene $\tilde{E}$ von E isomorph. Bezüglich dieses Isomorphismus $\phi: E' \rightarrow \tilde{E}$ gilt für die nach Definition 5.7. gebildeten Mengen:

$$[U, V]_P = \phi(\langle U, V \rangle_P'),$$

$$\langle U, V \rangle_P = \phi([U, V]_P').$$

Beweis.

Der Isomorphismus läßt sich angeben: Für $x, y \in C$, $z \in C \cup \{\infty\}$ sei

$$\begin{aligned} \phi: P' &\longrightarrow G \\ (x, y)' &\longmapsto [x, -y] \\ (z)' &\longmapsto [z] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi: G' &\longrightarrow P \\ [x, y]' &\longmapsto (x, -y) \\ [z]' &\longmapsto (z). \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} (x, y)' I' [u, v]' &\iff y = u \cdot x + v \iff x \circ u - y = -v \iff (u, -v) I [x, -y] \\ &\iff \phi((x, y)') I \phi([u, v]'), \end{aligned}$$

und auch die übrigen Inzidenzen bleiben erhalten. Der zweite Teil der Behauptung ist eine unmittelbare Folgerung aus Definition 5.7. und der Gestalt des Isomorphismus ϕ . $\square$

Lemma 5.9. *Ist E eine topologische Ebene über der Cartesischen Gruppe C und wird auf $C\mathbf{U}[\infty]$ die Spurtopologie betrachtet, so bilden für $p \in C\mathbf{U}[\infty]$ die Mengen $[U, V]_p$, $\langle U, V \rangle_p$ aus Definition 5.7. eine Basis des Umgebungssystems von $\langle p \rangle$ bzw. von $[p]$.*

Beweis.

Ist V eine offene Menge auf $C\mathbf{U}[\infty] = OE$, so ist auch die Menge $(V) = \{(u) : u \in V\}$ auf UV offen, da sie durch eine Projektivität aus V entstanden ist. Hieraus erkennt man, daß die Punktmengen $[U, V]_p$ Produkte von offenen Umgebungen zweier affiner Punktreihen sind. Diese Produkte bilden eine Umgebungsbasis (Abb. 5.2., 5.3.). Aus Lemma 5.8. folgt die Aussage für den Geradenraum. $\square$

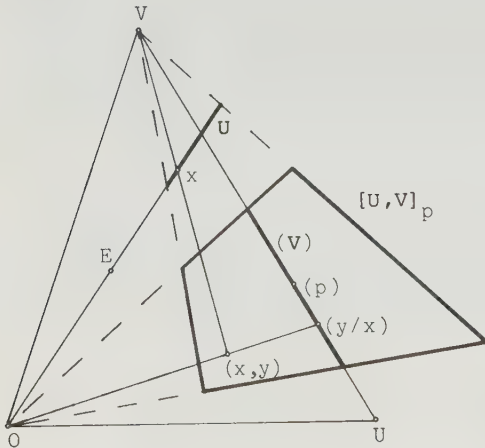


Abb. 5.2.

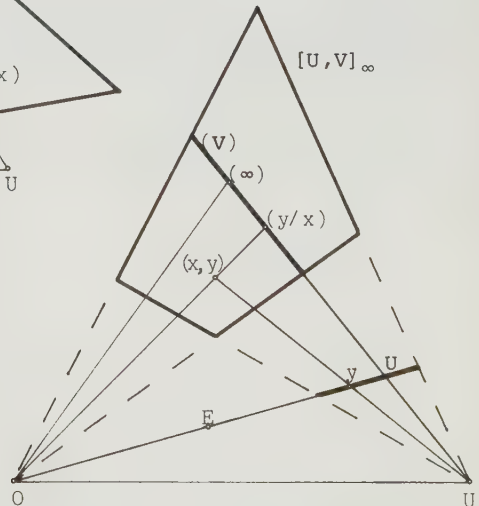


Abb. 5.3.

Nun zu dem schon angekündigten Satz:

Satz 5.10. Sei $(K_k, T) = (C, T)$ eine topologische Cartesische M -Gruppe, T sei feiner als die Ordnungstopologie. Dann läßt sich T zu einer Topologie der durch C koordinatisierten Ebene E so fortsetzen, daß E eine topologische projektive Ebene ist. Diese Topologie ist feiner als die Ordnungstopologie der Ebene.

Beweis.

Zunächst soll eine Topologie auf dem Punktraum erklärt werden. Die affine Ebene $C \times C$ wird mit der Produkttopologie versehen. Die Topologie T werde wie in Lemma 5.6. beschrieben auf $C \cup \{\infty\}$ fortgesetzt. Die in Definition 5.7. gebildeten Mengen $[U, V]_V$ sollen Basis des Umgebungssystems von (v) , $v \in C \cup \{\infty\}$ werden. Dazu genügt es zu zeigen, daß es zu offenen Mengen U, V in $C \cup \{\infty\}$ und zu einem Punkt $P \in [U, V]_V$ eine ganze Umgebung von P gibt, die in $[U, V]_V$ liegt.

Sei zunächst $v \neq \infty$ und $(p, q) \in [U, V]_V$, d.h. $0 \neq p \in U$, $q/p \in V$. Nach Lemma 5.6. gibt es $W_1 \in \mathcal{U}(p)$, $W_2 \in \mathcal{U}(q)$ mit $\infty \notin W_1 \subset U$, $\infty \notin W_2$, so daß $W_2/W_1 \subset V$ gilt. Dann ist $W_1 \times W_2 \subset [U, V]_V$, denn für $(x, y) \in W_1 \times W_2$ ist $x \in U$ und $y/x \in W_2/W_1 \subset V$. Für $(r) \in [U, V]_V$, d.h. für $r \in V$, gilt $[U, V]_V = [U, V]_r$, da V offen ist.

Sei jetzt $(p, q) \in [U, V]_\infty$, d.h. $0 \neq q \in U$, $q/p \in V$. Dann gibt es $W_1 \in \mathcal{U}(p)$, $W_2 \in \mathcal{U}(q)$ mit $\infty \notin W_1$, $\infty \notin W_2 \subset U$ und $W_2/W_1 \subset V$. Dann ist $W_1 \times W_2 \subset [U, V]_\infty$, denn für $(x, y) \in W_1 \times W_2$ ist $y \in U$ und $y/x \in W_2/W_1 \subset V$.

Sei $(r) \in [U, V]_\infty$, d.h. $0 \neq r \in V$. Nach Lemma 5.6. gibt es $W_1 \in \mathcal{U}(\infty)$, $W_2 \in \mathcal{U}(r)$ mit $0 \notin W_1$, $0 \notin W_2 \subset V$, so daß $W_2 \circ W_1 \subset U$ gilt. Dann ist $[W_1, W_2]_r \subset [U, V]_\infty$, denn für $(x, y) \in [W_1, W_2]_r$ gilt $0 \neq x \in W_1$, $y/x \in W_2 \subset V$ und $y = y/x \circ x \in W_2 \circ W_1 \subset U$, also $(x, y) \in [U, V]_\infty$, und für $(z) \in [W_1, W_2]_r$ gilt $z \in W_2 \subset V$, also $(z) \in [U, V]_\infty$.

Da die zu E duale Ebene wieder eine Moulstonebene ist, folgt nach Lemma 5.8., daß die Topologie auf dem Geradenraum dual erklärt werden kann. Die nun definierte Topologie ist feiner als die Ordnungstopologie der Ebene: Dies gilt offenbar auf der affinen Ebene; auf der Punktreihe $[\infty]$ bilden die Umgebungen aus Definition 5.7. Umgebungsbasen konvexer Vierecke, wenn für U, V Intervalle gewählt werden. Die duale Aussage gilt auf dem Geradenraum.

Es bleibt nun zu zeigen, daß in diesem Paar von Topologien Verbinden eine stetige Operation ist. Wieder nach Lemma 5.8. folgt dann, daß auch Schneiden stetig ist; damit ist E eine topologische Ebene.

Das Verbinden zweier Punkte P, Q ist dann stetig, wenn nicht P oder Q auf der Geraden $[\infty]$ liegen, und wenn die Verbindungsgerade nicht durch (∞) geht. Dies folgt sofort aus den Stetigkeitsforderungen an eine topologische Cartesische Gruppe. Die anderen Möglichkeiten müssen in einer Reihe von Fällen unterschieden werden. (Vgl. hierzu auch den Beweis von Satz 1.11. in Salzmann [27].)

Im folgenden sei für alle auftretenden Umgebungen $U \in U(\infty)$ angenommen, daß $0 \notin U$ gilt. Für $i \in \mathbb{N}$ sei $k_i \in \{k^{\mathbb{Z}} : z \in \mathbb{Z}\}$. Es wird häufig verwendet, daß in C gilt:

$$yx^{-1} = (y/x)k_1, \quad u^{-1}(-v) = k_1(u \setminus (-v)).$$

Im Falle $x_1 \neq x_2$ ist die Verbindungsgerade $[u, v]$ von $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} (*) \quad u \circ x_1 + v &= uk_1x_1 + v = y_1, \\ u \circ x_2 + v &= uk_2x_2 + v = y_2. \end{aligned}$$

$$1. \quad (p, q_1), (p, q_2) \longmapsto [p], \quad q_1 \neq q_2.$$

Sei $\langle U, V \rangle_p$ gegeben, gesucht sind Umgebungen $U_1 \times V_i$ von (p, q_i) , $i = 1, 2$, die durch Verbinden in $\langle U, V \rangle_p$ abgebildet werden.

Seien $x_1 \neq x_2$, $W_i \in U(q_i)$ disjunkte Umgebungen, $y_i \in W_i$ und u, v nach (*) bestimmt. Es wird gezeigt:

(**) Zu V gibt es $W \in U(\infty)$, $U_1 \in U(p)$, $W_i \supset V_i \in U(q_i)$, $i = 1, 2$, so daß aus $u \in W$, $x_i \in U_1$, $y_i \in V_i$ folgt: $u \setminus (-v) \in V$.

Aus (*) ergibt sich

$$\begin{aligned} k_1 x_1 - u^{-1} y_1 &= u^{-1}(-v), \\ k_2 x_1 - k_3 u^{-1} y_1 &= u \setminus (-v). \end{aligned}$$

Ist $p = 0$, so gibt es U_1, V_1, W , so daß

$$k_2 U_1 - k_3 W^{-1} V_1 \subset V$$

gleichzeitig für alle möglichen (endlich vielen) auftretenden Werte von k_2, k_3 gilt und damit (**) erfüllt ist. (V_2 unterliegt in diesem Fall noch keiner Bedingung.)

Sei jetzt $p \neq 0$. Die Ebene E ist in der Ordnungstopologie T_0 eine topologische Ebene. Bezüglich dieser Topologie gilt (**), denn aus der Stetigkeit der Abbildung $(p, q_1), (p, q_2) \mapsto [p]$ folgt, daß u^{-1} in eine beliebig kleine Nullumgebung in T_0 und $u \setminus (-v)$ in eine beliebig kleine Umgebung von p in T_0 abgebildet werden kann. Werden die Umgebungen von (p, q_1) und (p, q_2) klein genug gewählt, so muß für alle Punkte (x_i, y_i) daraus mit $x_1 \neq x_2$ gelten: $k_2 = 1$. Die Umgebungen U_1 , V_1 und W in der Topologie T können noch feiner gewählt werden, es kann also $k_2 = 1$ angenommen werden und

$$U_1 - k_3 W^{-1} V_1 \subset V$$

ist erreichbar.

Um $[u, v] \in \langle U, V \rangle_p$ zu erhalten, muß noch $u \in W \cap U$ gelten. Dann ist wegen (**) auch $u \setminus (-v) \in V$, also $[u, v] \in \langle U, V \rangle_p$. Aus (*) folgt

$$u = (y_1 - y_2)(k_1 x_1 - k_2 x_2)^{-1}.$$

Da $y_1 - y_2 \neq 0$ ist, gibt es $W_0 \in U(0)$, und V_1, V_2 können so verkleinert werden, daß $(V_1 - V_2)W_0^{-1} \subset U \cap W$ gilt.

Ist $p = 0$, so kann $(k_1 U_1 - k_2 U_1) \subset W_0$ durch Verkleinern von U_1 erreicht werden. Ist $p \neq 0$, so sei U_1 so klein, daß alle Elemente von U_1 gleiches Vorzeichen haben. Dann ist für $x_1, x_2 \in U_1$ auch $k_1 = k_2$, und es kann wieder $(k_1 U_1 - k_1 U_1) \subset W_0$ für die möglichen Werte von k_1 erreicht werden, in jedem Fall also

$$(V_1 - V_2)(k_1 U_1 - k_2 U_1)^{-1} \subset U \cap W.$$

Nun liegt also für $(x_i, y_i) \in U_1 \times V_i, i = 1, 2$ die Verbindungsgerade $[u, v]$ in $\langle U, V \rangle_p$, falls $x_1 \neq x_2$ ist. Im Falle $x_1 = x_2$ ist die Verbindungsgerade gleich $[x_1]$, und wenn noch $U_1 \subset V$ verlangt wird, gilt $[x_1] \in \langle U, V \rangle_p$.

2. $(p, q), (\infty) \longmapsto [p]$

Sei $\langle U, V \rangle_p$ gegeben, gesucht sind Umgebungen $U_1 \times V_1$ von (p, q) , $[U_2, V_2]_\infty$ von (∞) , die in $\langle U, V \rangle_p$ abgebildet werden.

Aus (*) folgt wie unter 1.:

$$k_2 x_1 - k_3 u^{-1} y_1 = u \setminus (-v),$$

und die gleiche Argumentation zeigt, daß $p = 0$ oder $k_2 = 1$ angenommen werden kann. In beiden Fällen gibt es Umgebungen $U_1 \in U(p), V_1 \in U(q), U_2, V_2, W \in U(\infty)$, so daß aus $x_1 \in U_1, y_1 \in V_1, (x_2, y_2) \in [U_2, V_2]_\infty$ und $u^{-1} \in W^{-1}$ folgt: $u \setminus (-v) \in V$.

Um $[u, v] \in \langle U, V \rangle_p$ zu erhalten, muß also noch $u \in U \cap W$ erreicht werden. Aus (*) ergibt sich, falls $y_2 \neq 0 \neq y_1 y_2^{-1} - 1$:

$$\begin{aligned} u(k_1 x_1 - k_2 x_2) y_2^{-1} &= y_1 y_2^{-1} - 1, \\ u &= (y_1 y_2^{-1} - 1)(k_1 x_1 y_2^{-1} - k_3 (y_2 / x_2)^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Die Umgebungen $U_i, V_i, i = 1, 2$ können so verkleinert werden, daß für $y_1 \in V_1$ und $y_2 \in U_2$ gilt: $y_2 \neq 0 \neq y_1 y_2^{-1} - 1$ und so, daß

$$(V_1 U_2^{-1} - 1)(k_1 U_1 U_2^{-1} - k_3 V_2^{-1})^{-1} \subset U \cap W$$

für alle möglichen Werte von k_1, k_3 erfüllt ist, also für $(x_1, y_1) \in U_1 \times V_1$ und $(x_2, y_2) \in [U_2, V_2]_\infty$ im Falle $x_1 \neq x_2$ gilt: $u \in U \cap W$, $u \setminus (-v) \in V$.

Im Falle $x_1 = x_2$ liegt die Verbindungsgerade $[x_1]$ in $\langle U, V \rangle_p$, falls noch $U_1 \subset V$ gesetzt wird.

Es müssen noch die Punkte $(x_1, y_1) \in U_1 \times V_1$ mit Punkten $(z) \in [U_2, V_2]_\infty$ verbunden werden. Die Verbindungsgerade hat die Form $[z, v]$. Wird noch $V_2 \subset U \cap W$ verlangt, so ist $z \in U$ und wegen $z \in W$ auch $k_2 x_1 - k_3 z^{-1} y_1 = z \setminus (-v) \in V$.

3. $(p, q), (z) \longmapsto [z, t]$ mit $t = q - z \circ p$, $z \neq \infty$.

Sei eine Umgebung $U \times V$ von $[z, t]$ gegeben. Gesucht sind Umgebungen $U_1 \times V_1$ von (p, q) , $[U_2, V_2]_z$ von (z) , die durch Verbinden in $U \times V$ abgebildet werden.

Wegen $t = q - z \circ p$ gibt es $V_1 \in U(q)$, $W \in U(z)$, $U_1 \in U(p)$, so daß

$$V_1 - W \circ U_1 \subset V$$

gilt. Aus (*) folgt, falls $x_2 \neq 0 \neq k_1 x_1 x_2^{-1} - k_2$:

$$\begin{aligned} u(k_1 x_1 - k_2 x_2) x_2^{-1} &= y_1 x_2^{-1} - y_2 x_2^{-1}, \\ u &= (y_1 x_2^{-1} - k_3 (y_2 / x_2)) (k_1 x_1 x_2^{-1} - k_2)^{-1} = \\ &= (k_4 y_1 x_2^{-1} - y_2 / x_2) (k_5 x_1 x_2^{-1} - k_6)^{-1}. \end{aligned}$$

Die Umgebungen U_1, U_2 können so klein gewählt werden, daß für $x_i \in U_i$ gilt: $x_2 \neq 0 \neq k_1 x_1 x_2^{-1} - k_2$.

Ist $z = 0$, so können $U_1 \in U(p)$, $U_2 \in U(\infty)$, $V_1 \in U(q)$, $V_2 \in U(z)$ auch noch so gewählt werden, daß für die möglichen auftretenden Werte von k_4, k_5, k_6 gilt:

$$(k_4 V_1 U_2^{-1} - V_2) (k_5 U_1 U_2^{-1} - k_6)^{-1} \subset U \cap W$$

Die gleiche Argumentation wie unter 1. zeigt, daß im Falle $z \neq 0$ angenommen werden kann: $k_6 = 1$, und auch dann ist

$$(k_4 V_1 U_2^{-1} - V_2)(k_5 U_1 U_2^{-1} - 1)^{-1} \in U \cap W$$

erreichbar; für $(x_1, y_1) \in U_1 \times V_1$, $(x_2, y_2) \in [U_2, V_2]_Z$ gilt also $u \in U \cap W$ und wegen $v = x_1 \cdot u \cdot y_1$ auch $v \in V$.

Auch für $(x_1, y_1) \in U_1 \times V_1$, $(y) \in [U_2, V_2]_Z$ muß die Verbindungsgerade $[y, y_1 \cdot y \cdot x]$ in $U \times V$ liegen. Dies ist erfüllt, wenn noch $V_2 \subset U \cap W$ verlangt wird.

4. $(p_1), (p_2) \mapsto [\infty]$, $p_1 \neq p_2$, $p_1 \neq \infty \neq p_2$.

Es sei $\langle U, V \rangle_\infty$ gegeben. Gesucht sind für $i = 1, 2$ Umgebungen $[U_i, V_i]_{p_i}$, die durch Verbinden in $\langle U, V \rangle_\infty$ abgebildet werden.

Aus (*) folgt, falls $x_1 \neq 0 \neq v$:

$$\begin{aligned} u &= y_1 x_1^{-1} k_1^{-1} + (-v) x_1^{-1} k_1^{-1}, \\ u^{-1}(-v) &= ((-v)^{-1} y_1 x_1^{-1} k_1^{-1} + x_1^{-1} k_1^{-1})^{-1}, \\ u \setminus (-v) &= k_2 ((-v)^{-1} (y_1/x_1) k_3 + x_1^{-1} k_1^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Es gibt Umgebungen $W \in U(\infty)$, $U_1 \in U(\infty)$, $V_1 \in U(p_1)$, so daß für alle möglichen Werte von k_1, k_2, k_3 gilt:

$$k_2 ((-W)^{-1} V_1 k_3 + U_1^{-1} k_1^{-1})^{-1} \subset V.$$

Weiter folgt aus (*)

$$\begin{aligned} v(x_1^{-1} k_1^{-1} - x_2^{-1} k_2^{-1}) &= (y_1 x_1^{-1} k_1^{-1} - y_2 x_2^{-1} k_2^{-1}), \\ v &= ((y_1/x_1) k_3 k_1^{-1} - (y_2/x_2) k_4 k_2^{-1}) (x_1^{-1} k_1^{-1} - x_2^{-1} k_2^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Um zu erreichen, daß nicht beide Faktoren gleich Null werden, muß gezeigt werden, daß V_1 so verkleinert werden kann und V_2 so gewählt werden kann, daß für $y_i/x_i \in V_i$, $i = 1, 2$, gilt:

$$(\#) \quad ((y_1/x_1) k_3 k_1^{-1} - (y_2/x_2) k_4 k_2^{-1}) \neq 0.$$

Ist $p_1 = 0$ oder $p_2 = 0$, so ist (#) erfüllbar. Sei also $p_1 \neq 0$, $p_2 \neq 0$, V_1, V_2 disjunkt, alle Elemente von V_i sollen gleiches Vorzeichen wie p_i haben. Weiter kann $x_1 \neq 0 \neq x_2$ angenommen werden. Die folgenden Fälle müssen unterschieden werden:

- a) p_1, p_2 haben verschiedenes Vorzeichen ($p_1 p_2 < 0$); dann ist (#) erfüllt.
- b) $p_1 p_2 > 0$ und $x_1 x_2 > 0$. Dann ist $k_1 = k_2$, und da $y_1/x_1, y_2/x_2$ gleiches Vorzeichen haben, ist auch $y_1 y_2 > 0$, also $k_3 = k_4$ und (#) ist erfüllt.
- c) $p_1 > 0, p_2 > 0, x_1 x_2 < 0$. Sei etwa $x_1 < 0, x_2 > 0$ (also $y_1 < 0, y_2 > 0$). Dann ist $k_3 = k_4 = 1$; aus $u(x_2 - k_1 x_1) = y_2 - y_1 > 0$ folgt $u > 0$, also $k_1 = k_2 = 1$ und (#) ist richtig.
- d) $p_1 < 0, p_2 < 0, x_1 x_2 < 0$. Sei etwa $x_1 < 0, x_2 > 0$ (also $y_1 > 0, y_2 < 0$). Dann ist $k_3 = k, k_4 = 1$; aus $u(x_2 - k_1 x_1) = y_2 - y_1 < 0$ folgt $u < 0$, also $k_1 = k, k_2 = 1$. Es ist $k_3 k_1^{-1} = 1 = k_4 k_2^{-1}$ und (#) erfüllt.

Nachdem (#) gezeigt ist, können also für alle möglichen Werte von k_1, k_2, k_3, k_4 die Umgebungen U_i, V_i so klein gewählt werden, daß gilt:

$$(V_1 k_3 k_1^{-1} - V_2 k_4 k_2^{-1})(U_1^{-1} k_1^{-1} - U_2^{-1} k_2^{-1})^{-1} \subset U \cap W.$$

Für $(x_i, y_i) \in [U_i, V_i]_{p_i}, x_1 \neq x_2$ ist also $v \in U \cap W, u \setminus (-v) \in V$.

Im Falle $x_1 = x_2$ liegt die Verbindungsgerade $[x_1]$ in $\langle U, V \rangle_\infty$, wenn noch $U_1 \subset V$ verlangt wird.

Die Verbindung zweier Punkte $(x_i) \in [U_i, V_i]_{p_i}$ liefert die Gerade $[\infty] \in \langle U, V \rangle_\infty$, es muß also nur noch die Verbindung eines Punktes $(z) \in [U_2, V_2]_{p_2}$ mit $(x_1, y_1) \in [U_1, V_1]_{p_1}$ untersucht werden. Die Verbindungsgerade ist $[z, v]$ mit

$$v = y_1 - z k_1 x_1 = ((y_1/x_1) k_2 - z k_1) x_1.$$

Es muß noch $v \in U \cap W$ erreicht werden, dann ist auch $u \setminus (-v) \in V$. Eine Fallunterscheidung wie unter (#) zeigt, daß für $z \in V_2$, $y_1/x_1 \in V_1$ immer $(y_1/x_1)k_2 - zk_1 \neq 0$ ist. Nach eventueller weiterer Verkleinerung der Umgebungen gilt also

$$(V_1 k_2 - V_2 k_1) U_1 \subset U \cap W$$

und damit für $x_1 \in U_1$, $y_1/x_1 \in V_1$, $z \in V_2$ auch $v \in U \cap W$.

5. $(p), (\infty) \longmapsto [\infty]$, $p \neq \infty$.

Sei $\langle U, V \rangle_\infty$ gegeben; gesucht sind Umgebungen $[U_1, V_1]_p, [U_2, V_2]_\infty$, die durch Verbinden in $\langle U, V \rangle_\infty$ abgebildet werden.

Aus (*) folgt wie in 4., falls $x_1 \neq 0 \neq v$ ist:

$$u \setminus (-v) = k_2 ((-v)^{-1} (y_1/x_1) k_3 + x_1^{-1} k_1^{-1})^{-1}.$$

Es gibt also Umgebungen $W \in U(\infty)$, $U_1 \in U(\infty)$, $V_1 \in U(p)$, so daß für alle möglichen Werte von k_1, k_2, k_3 gilt:

$$k_2 ((-W)^{-1} V_1 k_3 + U_1^{-1} k_1^{-1})^{-1} \subset V.$$

Weiter folgt aus (*), falls noch $y_2 \neq 0$ angenommen wird:

$$\begin{aligned} u &= (y_1 - v) x_1^{-1} k_1^{-1}, \\ (y_1 - v) x_1^{-1} k_3 x_2 + v &= y_2, \\ v (y_2^{-1} - x_1^{-1} k_3 x_2 y_2^{-1}) &= 1 - y_1 x_1^{-1} k_3 x_2 y_2^{-1}, \\ v &= (1 - (y_1/x_1) k_4 (y_2/x_2)^{-1}) (y_2^{-1} - x_1^{-1} k_5 (y_2/x_2)^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

U_i, V_i , $i = 1, 2$ können so klein gewählt werden, daß gilt:

$$(1 - V_1 k_4 V_2^{-1}) (U_2^{-1} - U_1^{-1} k_5 V_2^{-1})^{-1} \subset U \cap W.$$

Für $x_1 \in U_1$, $y_2 \in U_2$, $y_1/x_1 \in V_1$, $y_2/x_2 \in V_2$ ist also $v \in U \cap W$ und damit auch $u \setminus (-v) \in V$, im Falle $x_1 \neq x_2$ liegt die Verbindungsgerade von (x_1, y_1) , (x_2, y_2) damit in $\langle U, V \rangle_\infty$. Ist $x_1 = x_2$, so gilt $[x_1] \in \langle U, V \rangle_\infty$, wenn noch $U_1 \subset V$ verlangt wird.

Sei nun $(x_1, y_1) \in [U_1, V_1]_p$ und $(z) \in [U_2, V_2]_\infty$. Die Verbindungsgerade ist $[z, v]$ mit $z \circ x_1 + v = y_1$. Wie zu Beginn von 5. folgt

daraus für $v \in W$ wegen

$$z \setminus (-v) = k_2 ((-v)^{-1} (y_1/x_1) k_3 + x_1^{-1} k_1^{-1})^{-1},$$

daß $z \setminus (-v) \in V$ gilt. Es ist

$$v = y_1 - z k_1 x_1 = z (z^{-1} y_1 x_1^{-1} - k_1) x_1 = z (z^{-1} (y_1/x_1) k_3 x_1^{-1} - k_1) x_1$$

und durch Verkleinerung der Mengen U_1, V_1, V_2 und für $x_1 \in U_1$, $y_1/x_1 \in V_1$, $z \in V_2$ wird $v \in U \cap W$ erreicht.

Sei $(z) \in [U_1, V_1]_p$, $(x_2, y_2) \in [U_2, V_2]_\infty$. Die Verbindungsgerade ist $[z, v]$ mit $z k_2 x_2 + v = y_2$.

Es gibt eine Umgebung $W' \in U(\infty)$, und V_1 kann so verkleinert werden, daß gilt:

$$V_1 \setminus (-W') \subset V,$$

also für $z \in V_1$, $v \in W'$ erfüllt ist: $z \setminus (-v) \in V$. Weiter gilt

$$v = (1 - z k_2 x_2 y_2^{-1}) y_2 = (1 - z k_3 (y_2/x_2)^{-1}) y_2,$$

und es kann auch noch

$$(1 - V_1 k_3 V_2^{-1}) U_2 \subset U \cap W'$$

für die möglichen Werte von k_3 erreicht werden. Damit ist für $z \in V_1$, $y_2 \in U_2$, $y_2/x_2 \in V_2$ erreicht: $v \in U$ und $z \setminus (-v) \in V$.

Die Stetigkeit des Verbindens ist damit für alle möglichen Fälle nachgewiesen und E somit eine topologische Ebene. □

Die Stellentopologie von Moulstonebenen

Der Fortsetzungssatz 5.10. ist das wesentliche Hilfsmittel, um die Stellentopologie von Moulstonebenen zu bestimmen. Dies geschieht in Satz 5.13.. Zwei Hilfssätze müssen noch vorangestellt werden.

Lemma 5.11. Sei $(K_{k,d}, \lambda)$ eine Cartesische Gruppe mit Stelle λ ; falls $d \neq 0$ ist, sei $\lambda(d) = \infty$. Die durch $K_{k,d}$ koordinatisierte Ebene trage die Stellentopologie T_λ . Dann gilt: $T_\lambda|_{K_{k,d}}$ ist feiner als die Ordnungstopologie und feiner als die durch die Stelle λ des Schiefkörpers K auf K induzierte Stellentopologie (vgl. Definition 3.8.).

Beweis.

Aus Satz 5.4. folgt, daß λ auf dem $K_{k,d}$ zugrundeliegenden Schiefkörper K eine Stelle induziert. Die Stellentopologie des Schiefkörpers (K, λ) sei hier mit T_K bezeichnet. Auf $K_{k,d}$ sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} (K_{k,d}, T_\lambda) &\longrightarrow (K_{k,d}, T_\lambda) \\ \phi_a : x &\longmapsto a \circ x \circ a \quad a > 0, \\ \psi_a : x &\longmapsto x + a, \\ \nu : x &\longmapsto -x \end{aligned}$$

Homöomorphismen, da sie geometrisch eine Hintereinanderausführung von Projektivitäten darstellen. Damit sind für $a > 0$ die Mengen

$$U_a(x) = \{\zeta \in K : (a \circ (\zeta - x) \circ a)^\lambda = 0\} = \psi_x \circ \phi_a^{-1}(\{\zeta \in K : (\zeta)^\lambda = 0\})$$

offen in T_λ .

Wegen $a(\zeta - x)a = a \circ (\zeta - x) \circ a$ für $a > 0$ bilden die Mengen $U_a(x)$ in K eine Umgebungsbasis von x in der Topologie T_K ; es ist also

T_λ feiner als T_K . Um zu zeigen, daß T_λ feiner als die Ordnungstopologie auf $K_{k,d}$ ist, genügt es wegen der Stetigkeit von ψ_a und v zu zeigen, daß die Menge $\{x \in K : x > d\}$ in T_λ offen ist. Sei dazu $x > d$. Zu zeigen ist, daß x in T_λ eine Umgebung besitzt, deren Elemente alle größer als d sind. Sei $b < 0$ ein festes Element, sei W eine T_K -Umgebung von 1 , so daß Wxb und $Wxb + d(1-k)b$ disjunkte Umgebungen von xb und von $xkb + d(1-k)b$ sind.

Es ist $xob = xb$, daher gibt es eine Umgebung V von x in T_λ mit

$$Vob \subset Wxb.$$

Es kann $d \notin V \cap Wx$ angenommen werden. Dann ist $V \cap Wx$ die gesuchte Umgebung von x : Angenommen es gibt $d > y \in V \cap Wx$. Dann gilt

$$yob \in Wxb,$$

$$yob = (yk)b + d(1-k)b \in Wxb + d(1-k)b,$$

im Widerspruch zu

$$Wxb \cap Wxb + d(1-k)b = \emptyset.$$

□

Lemma 5.12. Sei (E, T, λ) eine topologische M -Ebene mit Epimorphismus λ , $K_{k,d}$ nach Lemma 5.3. so gewählt, daß $\lambda|_{K_{k,d}}$ eine Stelle ist; also ist nach Satz 5.4. λ auch Stelle des Schiefkörpers K . Ist $T|K$ feiner als die Stellentopologie des Schiefkörpers K , so ist T feiner als die Stellentopologie T_λ der Ebene E .

Da (E, T) eine topologische Ebene ist, sind natürlich Zentralprojektionen stetig. Wegen der Dualitätsbeziehung in Lemma 5.8. und aufgrund der Charakterisierung der Stellentopologie in Satz 2.12. genügt es zu zeigen, daß Urbilder von Punkten offen in T sind. Für $x \in K$ sind die Mengen

$$V_x = \{\zeta \in K \cup \{\infty\} : \zeta^\lambda = x^\lambda\}$$

offen in der Stellentopologie von K , also auch offen in $T|K$. Der Epimorphismus der Ebene ist durch die Stelle λ bestimmt, wie bei Prieß-Crampe [22], S.243 ausgeführt.

Für (p, q) mit $p^\lambda \neq \infty^\lambda \neq q^\lambda$ ist

$$(x, y) \in V_p \times V_q \iff x^\lambda = p^\lambda, y^\lambda = q^\lambda \iff (x, y)^\lambda = (p, q)^\lambda.$$

Für (p) mit $p^\lambda \neq \infty^\lambda$ ist

$$\begin{aligned} (x, y) \in [V_\infty, V_p]_p &\iff x^\lambda = \infty^\lambda, (y/x)^\lambda = p^\lambda \\ &\iff (x, y)^\lambda = [y/x, 0]^\lambda \cap [x]^\lambda = [p, 0]^\lambda \cap [\infty]^\lambda = (p)^\lambda; \end{aligned}$$

$$(z) \in [V_\infty, V_p]_p \iff z^\lambda = p^\lambda \iff (z)^\lambda = (p)^\lambda.$$

Für den Punkt (∞) gilt:

$$\begin{aligned} (x, y) \in [V_\infty, V_\infty]_\infty &\iff y^\lambda = \infty^\lambda, (y/x)^\lambda = \infty^\lambda \\ &\iff (x, y)^\lambda = [y/x, 0]^\lambda \cap [0, y]^\lambda = [0]^\lambda \cap [\infty]^\lambda = (\infty)^\lambda; \end{aligned}$$

$$(z) \in [V_\infty, V_\infty]_\infty \iff z^\lambda = \infty^\lambda \iff (z)^\lambda = (\infty)^\lambda.$$

$V_p \times V_q$, $[V_\infty, V_p]_p$, $[V_\infty, V_\infty]_\infty$ sind also Urbilder von Punkten und offene Mengen. Damit sind aber alle Urbilder erfaßt, denn aus $x^\lambda = \infty^\lambda$ oder $y^\lambda = \infty^\lambda$ folgt $(x, y)^\lambda = (z)^\lambda$ für ein $z \in K_K \cup \{\infty\}$, und $z^\lambda = \infty^\lambda$ hat $(z)^\lambda = (\infty)^\lambda$ zur Folge. $\square$

Nun kann das Hauptergebnis dieses Kapitels formuliert werden.

Satz 5.13. *Sei E eine (U, u) -M-Ebene mit Epimorphismus λ , T_λ die Stellentopologie. Dann ist (E, T_λ) eine topologische projektive Ebene. Für $u^\lambda \in U^\lambda$ sei K_K eine M -Gruppe, die E koordinatisiert; für $u^\lambda \in U^\lambda$ sei $K_{K,d}$ eine nach Lemma 5.3. gebildete Cartesische Gruppe, die E koordinatisiert, so daß $\lambda(d) = \infty$ und $\lambda|_{K_{K,d}}$ eine Stelle ist. In beiden Fällen ist $T_\lambda|_K$ das Supremum der Ordnungstopologie und der Stellentopologie des Schiefkörpers K . Insbesondere ist T_λ feiner als die Ordnungstopologie der Ebene E .*

Beweis.

Sei $g = \text{OE} \setminus \{\text{OE} \cap \text{UV}\}$. Alle auftretenden Ternärkörper und Körper haben als Elemente die Elemente von g . Sei T_g das Supremum der Ordnungstopologie und der Stellentopologie des Schiefkörpers K ; sei zunächst $d = 0$, also $K_{k,d} = K_k$.

Nach Satz 5.10. läßt sich T_g zu einer Topologie T der Ebene E fortsetzen. Aus Lemma 5.12. folgt, daß T feiner als T_λ ist. Nach Lemma 5.11. ist weiter $T_\lambda|_g$ feiner als T_g . Dann ist aber nach 2.13. auch T_λ feiner als T . Also ist $T = T_\lambda$, und T ist nach 5.10. feiner als die Ordnungstopologie.

Sei jetzt $d \neq 0$. Nach Satz 5.2. gibt es eine M -Gruppe K'_k , die E koordinatisiert und einen α -Isomorphismus h von K nach K' , der gleichzeitig eine Projektivität von g ist. (Als Mengen stimmen K und K' überein.) Auf K' wird durch h eine Topologie $S_g = h(T_g)$ definiert, die feiner als die Ordnungstopologie ist. (K', S_g) ist ein topologischer Körper, also nach Lemma 5.5. auch (K'_k, S_g) eine topologische M -Gruppe und S_g nach 5.10. zu einer Topologie S der Ebene E fortsetzbar, die feiner als die Ordnungstopologie ist. Da $T_\lambda|_g$ feiner als T_g ist, und weil h ein T_λ -Homöomorphismus ist, ist $T_\lambda|_g$ auch feiner als S_g und, wieder nach 2.13., auch T_λ feiner als S . Da (E, S) eine topologische Ebene ist, folgt, daß h auch ein S -Homöomorphismus ist. Also erhält man $T_g = h^{-1}(S_g) = S_g$ und folglich ist S_g feiner als die Stellentopologie von K . Nach Lemma 5.12. ergibt sich, daß S feiner als T_λ ist, das heißt $S = T_\lambda$. $\square$

Die Stellentopologie einer Moulstonebene ist jedenfalls dann nicht diskret, wenn die Einschränkung der Stelle des Schiefkörpers K auf $\mathbb{Q}$ eine echte Stelle ist, und wenn die Ordnungstopologie auf $\mathbb{Q}$ nicht diskret ist (Dann ist K archimedisch und damit schon ein kommutativer Körper). $\mathbb{Q}$ trägt dann eine p -adische Topologie als Stellentopologie, und die obere Grenze von Stellentopologie und Ordnungstopologie ist nicht diskret.

Moultonebenen sind auch ein Beispiel für Ebenen, in denen die Stellentopologie auf Ternärkörpern echt feiner sein kann als die von den Mengen ${}_K V_K(x)$ erzeugte Topologie (vgl. 3.8.), die bei Alternativkörpern noch fein genug war. In der von ${}_K V_K(x)$ erzeugten Topologie ist die Multiplikation auf einer M-Gruppe sogar partiell unstetig, wenn die Stelle λ nicht ordnungsverträglich ist.

6. Kompakte unzusammenhängende Ebenen

Die einzigen unzusammenhängenden lokalkompakten Körper sind endliche Erweiterungen der p -adischen Körper $\mathbb{Q}_p$ und Körper von formalen Potenzreihen über einem endlichen Körper (Weil [32]), in jedem Fall Körper mit Bewertungstopologie. Die einzigen kompakten unzusammenhängenden papposschen Ebenen sind also Ebenen mit Stellentopologie. Es besteht die Hoffnung, weitere Beispiele kompakter unzusammenhängender Ebenen mit Stellentopologie zu finden. Ein entsprechender Satz wie in der Körpertheorie gilt jedoch nicht: Es gibt kompakte unzusammenhängende Ebenen über distributiven Quasikörpern, welche keine stetigen Epimorphismen mit diskretem Bild besitzen (Grundhöfer [10]).

Bevor nun Ebenen behandelt werden, die in der Stellentopologie kompakt sind, sollen im ersten Abschnitt dieses Kapitels kompakte Lenz-topologische Ebenen untersucht werden und insbesondere Kriterien hergeleitet werden, wann diese bereits topologische Ebenen sind.

Kompakte Lenz-topologische Ebenen

Es sei (E, T) eine Lenz-topologische Ebene mit nicht diskreter Topologie, so daß Punkt- und Geradenraum kompakt sind. Dann heiße (E, T) *kompakte Lenz-topologische Ebene*. In diesem Fall ist die Topologie des Punktraumes lokal das Produkt der linearen Topologien (siehe 1.13.). Die duale Aussage gilt auf dem Geradenraum.

Lemma 6.1. Ist $E = (P, G, I)$ eine kompakte Lenz-topologische Ebene, so sind die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \overset{*}{P} \times \overset{*}{Q} \setminus \Delta & \longrightarrow & P \\ (x, y) & \longmapsto & x \cap y \\ \\ G \setminus g & \longrightarrow & P \\ x & \longmapsto & x \cap g \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} g \times h \setminus \Delta & \longrightarrow & G \\ (X, Y) & \longmapsto & XY \\ \\ P \setminus P & \longrightarrow & G \\ X & \longmapsto & XP \end{array}$$

für alle Punkte P, Q und für alle Geraden g, h stetig. Dabei sei Δ jeweils die Menge, auf der Schneiden bzw. Verbinden nicht definiert sind.

Beweis.

Die Stetigkeit der ersten Abbildung für $P \neq Q$ ergibt sich unmittelbar aus 1.13., da die Umgebungen eines Punktes $x \cap y$ in diesem Fall genau durch die Schnittpunkte von Geraden aus Umgebungen von x auf $\overset{*}{P}$ und von y auf $\overset{*}{Q}$ bestimmt sind. Im Falle $P = Q$ folgt die Stetigkeit trivialerweise. Analog ist die zweite Abbildung stetig. Die Stetigkeit der beiden letzten Abbildungen wurde schon in 2.8. bewiesen. $\square$

Lemma 6.2. Ist (E, T) eine kompakte Lenz-topologische Ebene, so sind in jedem Ternärkörper K zu E die Abbildungen T, T_1, T_2, T_3 (vgl. 1.2.) in je zwei Variablen stetig.

Beweis.

Sei E durch (K, T) koordinatisiert, seien $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, x \in K$.

1. T ist stetig.

Es gilt $[x] \cap [a, b] = (x, T(a, x, b))$. Da die Ebene lokal die Produkttopologie trägt, ergibt sich daraus nach 6.1. die Stetigkeit der folgenden Abbildungsketten und damit die Behauptung:

$$\begin{array}{ccccccc} K \times K & \longrightarrow & (\overset{*}{\infty}) \times (\overset{*}{0}, \overset{*}{b}) \setminus \Delta & \longrightarrow & P & \longrightarrow & K \\ (x, a) & \longmapsto & ([x], [a, b]) & \longmapsto & (x, T(a, x, b)) & \longmapsto & T(a, x, b) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 K \times K & \longrightarrow & (\infty) \times (a) \setminus \Delta & \longrightarrow & P & \longrightarrow & K \\
 (x, b) & \longmapsto & ([x], [a, b]) & \longmapsto & (x, T(a, x, b)) & \longmapsto & T(a, x, b) \\
 \\
 K \times K & \longrightarrow & G \setminus [x] & \longrightarrow & P & \longrightarrow & K \\
 (a, b) & \longmapsto & [a, b] & \longmapsto & (x, T(a, x, b)) & \longmapsto & T(a, x, b)
 \end{array}$$

2. T_1 ist stetig

Die folgenden sechs Schnittabbildungen sind stetig. Weil alle diese Abbildungen $([a_1, b_1], [a_2, b_2])$ auf (y, z) mit $y = T_1(a_1, a_2, b_1, b_2)$, $z = T(a_1, y, b_1)$ abbilden, folgt die Stetigkeit von T_1 in je zwei Variablen wie in 1..

$$\begin{array}{ll}
 (0, b_1) \times (0, b_2) \setminus \Delta \longrightarrow P, & (a_1) \times (a_2) \setminus \Delta \longrightarrow P, \\
 (0, b_1) \times (a_2) \setminus \Delta \longrightarrow P, & [a_1, b_1] \times G \setminus \Delta \longrightarrow P, \\
 (a_1) \times (0, b_2) \setminus \Delta \longrightarrow P, & G \times [a_2, b_2] \setminus \Delta \longrightarrow P.
 \end{array}$$

Die Stetigkeit von T_3 folgt dual zu der von T_1 , die von T_2 dual zu der von T . □

Satz 6.3. *Ist (E, T) eine kompakte Lenz-topologische Ebene und K ein Ternärkörper von E , dann sind in der induzierten Topologie die additive und die multiplikative Loop topologische Loops¹⁾. Die Multiplikation von K ist auch in 0 stetig.*

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folgerung aus Lemma 6.2.. □

Salzmann beweist in [28], 2.2., daß lokalkompakte projektive Ebenen metrisierbar sind. Hierzu werden nur die Eigenschaften verwendet, daß Projektivitäten Homöomorphismen sind, und daß die additiven Loops topologische Loops sind. Es folgt also

¹⁾ Zum Begriff der topologischen Loop siehe Prieß-Crampe [22], S. 194.

Satz 6.4. Ist (E, T) eine kompakte Lenz-topologische Ebene, so hat E einen metrisierbaren Punkt- und Geradenraum. $\square$

Die Frage, ob kompakte Lenz-topologische Ebenen stets topologische Ebenen sind, ist noch offen. Eine Hilfestellung bei der weiteren Untersuchung dieser Frage kann der folgende Satz sein, der dazu äquivalente Bedingungen enthält. Im Anschluß daran wird eine erste Anwendung auf Translationsebenen gebracht (Satz 6.9.).

Satz 6.5. Sei (E, T) eine kompakte Lenz-topologische Ebene. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. E ist eine topologische Ebene.
2. Für jede Punktreihe l ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi_l : P \setminus l \times l &\longrightarrow G \\ (P, Q) &\longmapsto PQ \end{aligned}$$

stetig.

3. Für jedes Büschel $\overset{*}{P}$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi_P : G \setminus \overset{*}{P} \times \overset{*}{P} &\longrightarrow P \\ (g, h) &\longmapsto g \wedge h \end{aligned}$$

stetig.

4. Die Inzidenzrelation I ist in $P \times G$ abgeschlossen.
5. Für konvergente Folgen von Punkten bzw. von Geraden $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $P_n I g_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
 $(\lim P_n) I (\lim g_n)$.

6. In jedem Ternärkörper (K, T) zu E ist die Abbildung

$$\begin{aligned} K \times K \times K &\longrightarrow K \\ (a, x, b) &\longmapsto T(a, x, b) \end{aligned}$$

stetig.

Beweis.

1. $\Rightarrow$ 2. und 1. $\Rightarrow$ 3. ist trivial.

2. $\Rightarrow$ 4.:

(Der Beweis lehnt sich an den Beweis von Breitsprecher [7], S. 150 an, daß in kompakten topologischen Ebenen die Inzidenzrelation kompakt ist.) Da P und G metrische Räume sind, genügt es zu zeigen: jede Folge in I hat eine in I konvergente Teilfolge. Sei dazu (P_i', g_i') _{$i \in \mathbb{N}$} eine Folge in I . Es gibt eine in $P \times G$ gegen (P, g) konvergente Teilfolge (P_i, g_i) _{$i \in \mathbb{N}$} . Es wird PIg gezeigt.

Sei $1 \in G$ mit $P \neq 1$ und $g \neq 1$. Es kann $P_i \neq 1$ und $g_i \neq 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$ angenommen werden. Da Schneiden in einer Variablen stetig ist, folgt aus $\lim g_i = g$ auch $\lim(g_i \cap 1) = g \cap 1$ und aus $\lim(P_i, g_i \cap 1) = (P, g \cap 1)$ folgt wegen 2.:

$$g = \lim g_i = \lim(P_i(g_i \cap 1)) = P(g \cap 1),$$

also PIg .

3. $\Rightarrow$ 4. folgt dual zu 2. $\Rightarrow$ 4..

4. $\Rightarrow$ 5. ist klar, da der Limes von (P_n, g_n) in I liegen muß.

5. $\Rightarrow$ 1.:

Zu zeigen ist: für Folgen $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}, (Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $P_n \rightarrow P, Q_n \rightarrow Q, P \neq Q, P_n \neq Q_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $P_n Q_n \rightarrow PQ$, sowie die duale Aussage.

Sei $g_n = P_n Q_n$. Dann ist PQ der einzige Häufungspunkt von g_n : Sei g ein Häufungspunkt im Geradenraum und $(g_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Wegen $P_{n_i} \rightarrow P, Q_{n_i} \rightarrow Q, P_{n_i} I g_{n_i}, Q_{n_i} I g_{n_i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und 4. folgt PIg, QIg , also $g = PQ$.

g ist Limes der Folge (g_n) : Angenommen, es gäbe eine offene Umgebung U von g , in der nicht fast alle Folgenglieder liegen.

Da $G \setminus U$ kompakt ist, enthielte $G \setminus U$ einen weiteren, von g verschiedenen Häufungspunkt von (g_n) . Die Stetigkeit des Schneidens folgt dual.

1. $\Rightarrow$ 6. ist trivial.

6. $\Rightarrow$ 3.:

Für beliebiges $P \in \mathcal{P}$ ist ϕ_P an der Stelle $(g, h) \in G \setminus P^* \times P^*$ stetig: Hierzu koordinatisiere man so, daß $P = (\infty)$ und $h = [x] \neq [\infty]$ wird. Hat g die Koordinaten $[a, b]$, so gilt dann wie oben:

$$\phi_P(g, h) = \phi_{(\infty)}([a, b], [x]) = (x, T(a, x, b)) = g \cap h,$$

und diese Abbildung ist stetig. □

Lemma 6.6. Es sei (E, T) eine kompakte Lenz-topologische Ebene, $(K, \cdot)$ die multiplikative Loop eines Ternärkörpers zu E . Wird für $y \in K$ gesetzt $\infty \cdot y = 0 = y / \infty$, so sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} K^* \cup \{\infty\} \times K &\longrightarrow K \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y \\ (x, y) &\longmapsto y / x \end{aligned}$$

stetig.

Beweis.

Die folgenden Abbildungsketten sind stetig für $x \in K^*$, $y \in K$:

$$\begin{aligned} K^* \cup \{\infty\} \times K &\longrightarrow (0^*, 0) \times (0^* \setminus \{[0, 0], [0, 0], [0], [\infty]\}) \longrightarrow P \setminus (\infty) \longrightarrow K \\ (x, y) &\longmapsto ([x, 0], [0, y]) \longmapsto (x \cdot y, y) \longmapsto x \cdot y \\ (\infty, y) &\longmapsto ([0], [0, y]) \longmapsto (0, y) \longmapsto 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K^* \cup \{\infty\} \times K &\longrightarrow (\infty^*) \times (0^* \setminus \{[\infty], [\infty], [0], [0, 0]\}) \longrightarrow P \setminus (0, 0) \longrightarrow [\infty] \\ (x, y) &\longmapsto ([x], [0, y]) \longmapsto (x, y) \longmapsto (y / x) \\ (\infty, y) &\longmapsto ([\infty], [0, y]) \longmapsto (0) \longmapsto (0) \end{aligned}$$

Denn die erste Abbildung ist jeweils ein Paar von Projektivitäten, die zweite stetig als Schnittabbildung nach 6.1. und die dritte ist eine Zentralprojektion. Daraus folgt die Behauptung des Lemmas. $\square$

Lemma 6.7. *Sei V ein nicht diskreter lokalkompakter topologischer Rechtsvektorraum endlicher Dimension über dem Schiefkörper K . Für jedes $v \in V$ sei die Abbildung $K \rightarrow v \cdot K$, $k \mapsto vk$ ein Homöomorphismus. Dann ist die Topologie von K nicht diskret.*

Der Beweis ergibt sich aus Warner [31], S. 465, Korollar 1 zu Theorem 3. Die Voraussetzung, daß die Abbildungen $k \mapsto vk$ Homöomorphismen sein sollen, heißt gerade, daß V ein "straight vector space" im Sinne von [31] ist. Zu beachten ist nur, daß in [31] Linksvektorräume untersucht werden. $\square$

Lemma 6.8. *Ist (K, T) ein Ternärkörper einer kompakten Lenz-topologischen Ebene, und ist K ein distributiver Quasikörper oder ein Fastkörper oder ein Rechtsquasikörper endlicher Dimension über seinem Kern¹⁾, so ist K ein topologischer Ternärkörper.*

Beweis.

Es gilt $T(a, x, b) = ax + b$, $T_2(x, y, a) = -ax + y$ und $T_3(x_1, x_2, y_1, y_2) = (y_1 - y_2) / (x_1 - x_2)$ aufgrund der Rechtsdistributivität. Diese Abbildungen sind nach 6.3. als Hintereinanderausführungen stetiger Operationen stetig. Ist K distributiv, so folgt die Stetigkeit von T_3 analog. Ist K assoziativ, so gilt wegen

$$a_1x + b_1 = a_2x + b_2 \iff x + 0 = a_1^{-1}a_2x + a_1^{-1}(b_2 - b_1)$$

¹⁾ Der Kern $Z = \{k \in K : (xy)k = x(yk); (x+y)k = xk + yk \ \forall x, y \in K\}$ ist ein Schiefkörper. K ist ein Rechtsvektorraum über Z ; vgl. Pickert [21], S.204.

die Beziehung

$$T_1(a_1, a_2, b_1, b_2) = T_1(1, 0, a_1^{-1}a_2, a_1^{-1}(b_2 - b_1)).$$

Es ist also T_1 nach 6.2. stetig.

Sei jetzt K ein Rechtsquasikörper der Dimension n über seinem Kern Z . K ist lokalkompakt, nach Hähl [11], 1.3. ist dann auch Z lokalkompakt. Für $v \in K$ sind die Abbildungen $Z \rightarrow v \cdot Z$, $k \mapsto vk$ und $v \cdot Z \rightarrow Z$, $vk \mapsto (vk)/k$ stetig; es sind daher die Voraussetzungen von Lemma 6.7. erfüllt und Z ist nicht diskret. K ist dann in den Bezeichnungen von Hähl [11], 1.4. ein n -dimensionaler stetiger Quasiring über Z . Da die multiplikative Loop von K topologisch ist, folgt aus [11], 2.1., daß K ein topologischer Quasikörper ist. $\square$

Satz 6.9. *Sei (E, T) eine kompakte Lenz-topologische Translationsebene¹⁾ bezüglich der Geraden w . Liegt E in der Lenz-Barlotti-Klasse IV_{A_1} , so gebe es einen Ternärkörper K bezüglich $UV = w$, der endliche Dimension über seinem Kern hat. Dann ist E eine topologische projektive Ebene.*

Beweis²⁾.

Die Koordinatenkörper mit $UV = w$ sind Rechtsquasikörper. Nur solche werden im folgenden betrachtet. Liegt E nicht in der Klasse IV_{A_1} , so gibt es koordinatisierende Quasikörper, die sogar Fastkörper oder distributive Quasikörper sind (vgl. Prieß-Crampe [22], S. 262). Da die Topologie von E lokal die Produkttopologie ist, sind die Umgebungen der Punkte auf w und der Geraden w durch die in der Definition 5.7.

¹⁾ Vgl. Pickert [21], S.199. E liegt also mindestens in der Lenz-Klasse IV .

²⁾ Der Beweis lehnt sich an einen noch unveröffentlichten Beweis von Herrn Grundhöfer aus Tübingen an, der Kriterien dafür angibt, wann sich die Topologie eines lokalkompakten Quasikörpers auf die zugehörige Ebene fortsetzen läßt.

beschriebenen Mengen gegeben. Es wird gezeigt, daß die Bedingung 5. aus Satz 6.5. erfüllt ist. Seien also $P_n \rightarrow P$, $g_n \rightarrow g$ konvergente Folgen und sei $P_n \models g_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

1. $P \in P \setminus w$, $g \in G \setminus w$. Das Koordinatensystem kann so gewählt werden, daß $P = (x, y)$ und $g = [u, v]$ mit $x, y, u, v \in K$ gilt. Weiter kann auch $P_n = (x_n, y_n)$, $g_n = [u_n, v_n]$ für alle n angenommen werden. Wegen $y_n = u_n x_n + v_n$ und Satz 6.3. folgt:

$$u_n x_n + v_n \rightarrow ux + v = y.$$

2. Sei $g = w$. Angenommen $(x, y) = P \models w$. Es kann $P_n = (x_n, y_n)$ vorausgesetzt werden, und das Koordinatensystem kann so gewählt werden, daß auch $g_n = [u_n, v_n]$ für alle n angenommen werden kann. Es gilt dann nach 5.7.:

$$u_n \setminus (-v_n) \rightarrow \infty, v_n \rightarrow \infty.$$

Wegen $u_n x_n - y_n = -v_n$ und $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ folgt daraus auch $u_n \rightarrow \infty$. Das gültige Distributivgesetz liefert

$$x_n = u_n \setminus y_n + u_n \setminus (-v_n)$$

und aus Lemma 6.6. folgt $u_n \setminus y_n \rightarrow 0$. Das würde $x_n \rightarrow \infty$ zur Folge haben, im Widerspruch zu $x_n \rightarrow x \neq \infty$.

3. Es bleibt der Fall $P \models w$ zu untersuchen. Sei jetzt E bezüglich $UV = w$ so koordinatisiert, daß der Ternärkörper K ein Quasikörper endlicher Dimension oder ein Fastkörper oder ein distributiver Quasikörper ist. Sei zunächst $P = (z)$, $g = [u, v]$, $g_n = [u_n, v_n]$ mit $z, u, v, u_n, v_n \in K$. Es muß $z = u$ gefolgert werden.

Falls (P_n) eine Teilfolge (P_{n_i}) mit $P_{n_i} \models w$ enthält, so gilt $P_{n_i} = (z_{n_i}) \rightarrow (z)$ und wegen $[u_{n_i}, v_{n_i}] \models (z_{n_i})$ folgt $u_{n_i} \rightarrow u = z$.

Andernfalls kann $P_n = (x_n, y_n)$, $x_n, y_n \in K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ angenommen werden. Es gilt dann:

$$y_n/x_n = z_n + z, x_n \rightarrow \infty, u_n x_n + v_n = y_n.$$

Angenommen $u \neq z$. Dann kann auch $u_n \neq z_n$ für alle n angenommen werden, und aus $u_n x_n + v_n = z_n x_n$ folgt $x_n = T_1(u_n, z_n, v_n, 0)$ und da T_1 nach Lemma 6.8. stetig ist, folgt

$$T_1(u_n, z_n, v_n, 0) \rightarrow x \in K$$

im Widerspruch zu $x_n \rightarrow \infty$.

4. Für die weiteren Möglichkeiten des Falles PIw müssen nun die verschiedenen Ternärkörper typen unterschieden werden. Dabei wird der Beweis indirekt geführt, es wird also jeweils Pfg angenommen.

a) K ist ein endlich dimensionaler Quasikörper. Dann ist nach Pickert [21], S.204 jeder Quasikörper bezüglich $UV = w$ endlich dimensional, und es kann in 3. immer so koordinatisiert werden, daß $P = (z)$, $g = [u, v]$, $z, u, v \in K$ gilt.

b) K ist ein Fastkörper. Vertauscht man in der Koordinatisierung die Punkte U, V , so bleibt der Ternärkörper ein Fastkörper; es kann also $g \nVdash V$ angenommen werden und es bleibt der Fall $P = (\infty)$, $g = [u, v]$ zu untersuchen. Sei $g_n = [u_n, v_n]$ mit $u_n, v_n \in K$. Wie unter 3. sieht man, daß man sich darauf beschränken kann, $P_n = (x_n, y_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ anzunehmen. Es gilt also:

$$y_n x_n^{-1} = z_n + \infty, y_n \rightarrow \infty, u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v, u_n x_n + v_n = y_n.$$

Wegen $x_n = z_n^{-1} y_n$ folgt $u_n z_n^{-1} y_n + v_n = y_n$. Für große n ist $u_n z_n^{-1} \neq 1$ und dann gilt:

$$y_n = T_1(u_n z_n^{-1}, 1, v_n, 0) \rightarrow T_1(0, 1, v, 0)$$

im Widerspruch zu $y_n \rightarrow \infty$.

c) K ist ein distributiver Quasikörper. Es bleiben die Fälle $P = (\infty)$, $g = [u, v]$ und $P = (z)$, $g = [m]$ mit $u, v, z, m \in K$ zu untersuchen. Wieder kann man sich darauf beschränken, $P_n = (x_n, y_n)$ und $g_n = [u_n, v_n]$ für alle n anzunehmen.

Sei $P = (\infty)$, $g = [u, v]$: Es gilt

$$y_n/x_n \rightarrow \infty, y_n \rightarrow \infty, u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v.$$

Aus $u_n x_n + v_n = y_n$ folgt damit $x_n \rightarrow \infty$. Aus Lemma 6.6. ergibt sich $v_n/x_n \rightarrow 0$ und daraus

$$u_n + v_n/x_n = y_n/x_n \rightarrow u + 0 \neq \infty$$

im Widerspruch zu $y_n/x_n \rightarrow \infty$.

Sei $P = (z)$, $g = [m]$: Es gilt

$$y_n/x_n = z_n \rightarrow z, x_n \rightarrow \infty, u_n \setminus (-v_n) = m_n \rightarrow m, u_n \rightarrow \infty.$$

Wegen $y_n = z_n x_n$, $-v_n = u_n m_n$, $u_n x_n + v_n = y_n$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} z_n x_n &= u_n x_n - u_n m_n \\ z_n (x_n - m_n) + z_n m_n &= u_n (x_n - m_n) \\ u_n &= z_n + z_n m_n / (x_n - m_n). \end{aligned}$$

Wegen $x_n - m_n \rightarrow \infty$, $z_n m_n \rightarrow z m$ folgt aus Lemma 6.6.:

$$z_n m_n / (x_n - m_n) \rightarrow 0$$

also $u_n \rightarrow z + 0$, im Widerspruch zu $u_n \rightarrow \infty$. □

Die Ergebnisse dieses Abschnitts gelten insbesondere für Ebenen, die in der Stellentopologie kompakt sind. Die bisher gefundenen Ebenen mit kompakter Stellentopologie sind immer auch topologische projektive Ebenen. Beispiele hierfür sollen im folgenden gebracht werden.

Desarguessche kompakte Ebenen

Die desarguesschen kompakten Ebenen sind alle bekannt, da alle lokalkompakten Schiefkörper bekannt sind (Weil [32]). Für die unzusammenhängenden Schiefkörper gilt:

Satz 6.10. *Sei K ein nicht diskreter lokalkompakter unzusammenhängender Schiefkörper. Dann gibt es eine Bewertung von K mit endlichem Restklassenkörper, welche die Topologie induziert.*

Beweis.

Der Satz folgt unmittelbar aus den Ergebnissen des ersten Kapitels in Weil [32]: Theorem 6 (S.12) zeigt zusammen mit Proposition 1 (S.4), Theorem 4 und Definition 1 (S.8), daß die Modularfunktion mod diese Bewertung ist und daß der Restklassenkörper endlich ist. Aus Korollar 1 (S.5) ergibt sich, daß die Topologie durch die Bewertung induziert wird. $\square$

Jeder nicht diskrete lokalkompakte unzusammenhängende Schiefkörper ist also ein Schiefkörper mit Bewertungstopologie. Daraus ergibt sich unter Berücksichtigung von Satz 2.14.:

Satz 6.11. *Sei E eine nicht diskrete desarguessche kompakte unzusammenhängende Ebene. Dann gibt es einen Epimorphismus λ von E auf eine endliche Ebene. Die Topologie von E ist die Stellentopologie T_λ .* $\square$

Moufangebenen sind in der Stellentopologie auch topologische Ebenen. Es liegt nun die Frage nach kompakten unzusammenhängenden Moufangebenen nahe. Es ist jedoch bekannt, daß es solche nicht gibt: Ist A ein echter Alternativkörper, so ist A ein

achtdimensionaler Vektorraum über seinem Zentrum K , und die Abbildung $n: A \rightarrow K$, $x \mapsto x\bar{x}$ ist eine quadratische Form ([8], S.216). Angenommen A ist lokalkompakt. Das Zentrum K ist abgeschlossen, also auch lokalkompakt. Da die Voraussetzungen des Lemmas 6.7. erfüllt sind, ist K nicht diskret. K hat also einen endlichen Restklassenkörper und Proposition 2 in Springer [30], S.355 ist anwendbar; das heißt, es gibt ein x in $A \setminus \{0\}$ mit $n(x) = x\bar{x} = 0$, im Widerspruch zur Nullteilerfreiheit von A^1 .

Kompakte unzusammenhängende Ebenen über Cartesischen Gruppen

Im Kapitel 5 wurde die Stellentopologie von Moultebenen untersucht. Sei (E, T_λ) eine nicht diskrete lokalkompakte verallgemeinerte Moultebene und K_K eine M -Gruppe, die E koordinatisiert. Dann ist K_K lokalkompakt, und die Topologie von K_K ist nach 5.13. feiner als die Ordnungstopologie. Wegen 5.5. ist auch der angeordnete Schiefkörper K , der K_K zugrundeliegt, ein lokalkompakter topologischer Schiefkörper. Aus Weil [32], Theorem 5, S.11 folgt, daß K ein endlich dimensionaler Vektorraum (in der Produkttopologie der gewöhnlichen Topologie) über einem p -adischen Zahlkörper $\mathbb{Q}_p$ oder über $\mathbb{R}$ ist, da K unzusammenhängend ist also über $\mathbb{Q}_p$. Ordnung und Topologie in K und K_K stimmen überein, daher ist auch die von E auf K induzierte Topologie feiner als die Ordnungstopologie. Dies muß dann auch für die Einschränkung der beiden Topologien auf den Körper $\mathbb{Q}$ gelten. Dem widerspricht aber, daß jede in der p -adischen Topologie offene Menge auf $\mathbb{Q}$ sowohl positive als auch negative Elemente enthält. Es folgt also:

Satz 6.12. *Eine verallgemeinerte Moultebene mit nicht diskreter Stellentopologie ist nicht lokalkompakt.* □

¹⁾ Diesen Beweis teilte mir Herr Grundhöfer mit.

Beispiele nicht desarguesscher kompakter unzusammenhängender Ebenen findet man etwa bei Rink [26]. Ob die dort konstruierten Translationsebenen Ebenen mit Stellentopologie sind, ist nicht bekannt. Es soll nun noch ein Beispiel einer Ebene über einer echten Cartesischen Gruppe gegeben werden, die mit der Stellentopologie eine topologische projektive Ebene wird. Geht man bei dieser Konstruktion von einem lokalkompakten Schiefkörper aus, so erhält man eine kompakte Ebene mit Stellentopologie.

Definition 6.13. Sei (K, λ) ein Schiefkörper mit Stelle λ . Sei $K_{k, \lambda} = K(+, \circ)$, wobei $k \in K$ mit $k^\lambda \neq 0, \infty$ ist und $\circ$ definiert wird durch

$$a \circ b = \begin{cases} akb & \text{falls } a^\lambda = 0 = b^\lambda, \\ ab & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lemma 6.14. Die Menge $C = K_{k, \lambda}$ aus Definition 6.13. ist eine Cartesische Gruppe. Wird der Schiefkörper K mit der Stellentopologie T bezüglich λ versehen, so ist (C, T) eine topologische Cartesische Gruppe. λ ist eine Stelle von C . Eine Umgebungsbasis von $x \in C$ bilden die Mengen $U_a(x) = \{z \in C : ((a \circ (x - z)) \circ a)^\lambda = 0\}$.

Beweis. (Man vergleiche die ähnlichen Überlegungen im Zusammenhang mit topologischen M-Gruppen in 5.5.)

C ist eine Cartesische Gruppe, wenn die Gleichungen

$$\begin{aligned} x \circ p_1 - x \circ p_2 &= v, \quad p_1 \neq p_2, \\ -u_1 \circ y + u_2 \circ y &= w, \quad u_1 \neq u_2 \end{aligned}$$

eindeutig nach x bzw. nach y auflösbar sind¹⁾). Die Lösungen lassen sich angeben:

¹⁾ Vgl. Pickert [21], S.90. Die eindeutige Lösbarkeit hat auch zur Folge, daß $C(+, \circ)$ eine Doppelloop ist.

$$x = \left\{ \begin{array}{ll} v(p_1 - p_2)^{-1} & \text{falls } (v(p_1 - p_2)^{-1})^\lambda \neq 0 \\ v(p_1 - p_2)^{-1} & \text{falls } p_1^\lambda \neq 0 \neq p_2^\lambda \\ v(kp_1 - kp_2)^{-1} & \text{falls } p_1^\lambda = 0 = p_2^\lambda \\ v(kp_1 - p_2)^{-1} & \text{falls } p_1^\lambda = 0 \neq p_2^\lambda \\ v(p_1 - kp_2)^{-1} & \text{falls } p_1^\lambda \neq 0 = p_2^\lambda \end{array} \right\} \quad \text{und } v(p_1 - p_2)^{-1})^\lambda = 0$$

Dual erhält man die Lösung für y . Man sieht leicht, daß diese Lösungen überall definiert und eindeutig bestimmt sind.

Um zu sehen, daß (C, T) eine topologische Cartesische Gruppe ist, genügt es, die Stetigkeit der Abbildungen

$$\begin{aligned} (a, b) &\longmapsto a \circ b, \\ (p_1, p_2, v) &\longmapsto x, \quad p_1 \neq p_2, \\ (u_1, u_2, w) &\longmapsto y, \quad u_1 \neq u_2 \end{aligned}$$

nachzuweisen. Diese ist aber offensichtlich, denn da (K, T) ein topologischer Schiefkörper ist, sind die Teilbereiche von C^2 bzw. von C^3 , auf denen die Abbildungen abschnittsweise definiert sind, offen, und auf diesen Bereichen sind die Abbildungen stetig.

Die Bedingungen (S1') bis (S7') aus Satz 1.5. lassen sich sofort für (C, λ) verifizieren, λ ist also eine Stelle von C . Die letzte Behauptung folgt wegen Satz 3.10. und wegen $((a \circ b) \circ a)^\lambda = 0 \iff (aba)^\lambda = 0$. □

Die Cartesische Gruppe C ist nicht assoziativ und auch weder links- noch rechtsdistributiv. Es folgt daher, daß die durch C koordinatisierte Ebene E in der Lenzklasse II oder III liegt ([21], S.107). Ob E außer der (V, UV) -Transitivität weitere Transitivitäten besitzt, ist nicht bekannt. Jedenfalls ist E nicht $(0, OU)$ -transitiv; eine hierzu notwendige Bedingung von Yaqub [33], Theorem 1, (ii) ist verletzt¹⁾.

¹⁾Man wähle in der genannten Bedingung etwa u, c mit $\lambda(u) = 0 = \lambda(c)$ und $x = cukc$.

Satz 6.15. Sei (C, T) wie in Lemma 6.14.. Dann läßt sich T auf die durch C koordinatisierte Ebene E so fortsetzen, daß E eine topologische projektive Ebene ist.

Beweis.

Sei $E = (P, G, I)$ und sei $F = (P, G, \bar{I})$ die durch den Schiefkörper K koordinatisierte Ebene. T läßt sich auf F fortsetzen und ist die Stellentopologie der desarguesschen Ebene F (vgl. Satz 1.11. und Satz 3.12.). Die Umgebungen affiner Punkte und die Umgebungen von Geraden, die nicht durch (∞) gehen, sind durch die Produkttopologie von K gegeben; die der übrigen Punkte und Geraden können (wegen der Gültigkeit des Lemmas 5.9. für K) durch die Mengen aus Definition 5.7. beschrieben werden.

Punkt- und Geradenraum von E stimmen mit Punkt- und Geradenraum von F überein und sind also topologische Räume. Zu zeigen bleibt, daß in E Verbinden eine stetige Abbildung ist; die Stetigkeit des Schneidens folgt dann dual dazu. Die Verbindungsgerade der Punkte P, Q in F werde mit $\overline{PQ}$ bezeichnet. Da (C, T) eine topologische Cartesische Gruppe ist, hängt PQ stetig von P, Q ab, wenn nicht P oder Q auf $[\infty]$ liegen und wenn PQ nicht durch (∞) geht. Es bleiben wie in Satz 5.10. fünf Fälle zu unterscheiden. Im folgenden seien alle Umgebungen $U \in U(x)$ für $x \in C \cup \{\infty\}$ so klein angenommen, daß für $\zeta \in U$ stets $\zeta^\lambda = x^\lambda$ gilt.

1. $(p, q_1), (p, q_2) \longmapsto [p], q_1 \neq q_2.$

Sei $\langle U, V \rangle_p$ gegeben (also $U \in U(\infty), V \in U(p)$). Dann gibt es Umgebungen W_i von (p, q_i) , $i = 1, 2$ mit $\overline{W_1 W_2} = \{\overline{PQ} : P \in W_1, Q \in W_2\} \subset \langle U, V \rangle_p$. Dann ist $W_1 W_2 = \{PQ : P \in W_1, Q \in W_2\} = \overline{W_1 W_2}$:

Für $(x_i, y_i) \in W_i, x_1 \neq x_2$ liegt $[u, v]$ mit

$$ux_i + v = y_i, \quad i = 1, 2$$

in $\langle U, V \rangle_p$, insbesondere ist also $u \in U$, d.h. $u^\lambda = \infty$ und damit auch

$$u \circ x_i + v = y_i, \quad i = 1, 2$$

das heißt

$$(*) \quad (x_1, y_1)(x_2, y_2) = \overline{(x_1, y_1)} \overline{(x_2, y_2)}.$$

Offenbar gilt (*) auch für $x_1 = x_2$.

$$2. \quad (p, q), (\infty) \longmapsto [p].$$

Sei $\langle U, V \rangle_p$ wie in 1., $W_1 \in U((p, q))$, $W_2 = [U_2, V_2]_\infty \in U((\infty))$, so daß $\overline{W_1 W_2} \subset \langle U, V \rangle_p$ gilt. Dann ist wieder $W_1 W_2 = \overline{W_1 W_2}$:

Für $(x_i, y_i) \in W_i$ gilt (*) genau wie in 1.. Ist $(x_1, y_1) \in W_1$ und $(z) \in W_2$, so folgt $z \in V_2 \in U(\infty)$, also $z^\lambda = \infty$, und somit $z \circ x_1 = z x_1$, woraus sich

$$(x_1, y_1)(z) = \overline{(x_1, y_1)} \overline{(z)}$$

ergibt.

$$3. \quad (p, q), (z) \longmapsto [z, t] \text{ mit } t = q - z \circ p, \quad z \neq \infty.$$

Sei $U \times V \in U([z, t])$ gegeben.

a) $z^\lambda \neq 0$ oder $p^\lambda \neq 0$. Dann ist $(p, q)(z) = \overline{(p, q)} \overline{(z)}$. Sei $W_1 = U_1 \times V_1 \in U((p, q))$, $W_2 = [U_2, V_2]_z \in U((z))$ mit $\overline{W_1 W_2} \subset U \times V$. Es kann $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ angenommen werden. Dann gilt $W_1 W_2 = \overline{W_1 W_2}$:

Sei $(x_i, y_i) \in W_i$, also $[u, v]$ mit

$$u x_i + v = y_i, \quad i = 1, 2$$

in $U \times V$. Es ist $x_2 \in U_2$, also $x_2^\lambda \neq 0$. Aus $z^\lambda \neq 0$ folgt $u^\lambda \neq 0$, und $p^\lambda \neq 0$ hat $x_1^\lambda \neq 0$ zur Folge; jedenfalls ist also $u \circ x_i = u x_i$ für $i = 1, 2$ und damit gilt (*) wie in 1..

Ist $(x_1, y_1) \in W_1$, $(y) \in W_2$, so gilt $y \in V_2 \in U(Z)$, also $y^\lambda \neq 0$ oder $x_1^\lambda \neq 0$, und damit wegen $y \circ x_1 = yx_1$ wieder

$$(x_1, y_1)(y) = \overline{(x_1, y_1)}(\overline{y}).$$

b) $z^\lambda = 0 = p^\lambda$, also $t = q - z(kp)$. Wegen $\overline{(kp, q)}(z) = [z, t]$ gibt es $W_1' = U_1 \times V_1 \in U((kp, q))$, $W_2 = [U_2, V_2]_Z \in U((z))$ mit $\overline{W_1' W_2} \subset U \times V$. Sei $W_1 = k^3 U_1 \times V_1 \in U((p, q))$. Dann gilt $W_1 W_2 \subset U \times V$:

Für $(x_i, y_i) \in W_i$, $i = 1, 2$, gilt $x_1^\lambda = 0$, $x_2^\lambda = \infty$, und $[u, v]$ mit

$$u(kx_1) + v = y_1,$$

$$ux_2 + v = y_2$$

liegt in $U \times V$; also ist $u^\lambda = 0$, und damit gilt:

$$u \circ x_i + v = y_i, \quad i = 1, 2,$$

das heißt $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = [u, v]$.

Für $(x_1, y_1) \in W_1$, $(y) \in W_2$ gilt $x_1^\lambda = 0$, $y^\lambda = 0$ und wegen $y \circ x_1 = ykx_1$ auch

$$(x_1, y_1)(y) = \overline{(kx_1, y_1)}(\overline{y}) \in U \times V.$$

4. $(p_1), (p_2) \longmapsto [\infty]$, $p_1 \neq p_2$, $p_1 \neq \infty \neq p_2$.

Sei $\langle U, V \rangle_\infty$ gegeben und $W_i = [U_i, V_i]_{p_i}$, $i = 1, 2$ mit $\overline{W_1 W_2} \subset \langle U, V \rangle_\infty$. Dann ist $W_1 W_2 = \overline{W_1 W_2}$:

Für $(x_i, y_i) \in W_i$ ist $x_i^\lambda = \infty$ für $i = 1, 2$ und (*) gilt wie in 1.. Für $(z_i) \in W_i$ ist natürlich $(z_1)(z_2) = \overline{(z_1)}(\overline{z_2}) = [\infty]$ und ebenso folgt für $(x_1, y_1) \in W_1$, $(z) \in W_2$ wegen $x_1^\lambda = \infty$, daß $z \circ x_1 = zx_1$ gilt und damit

$$(x_1, y_1)(z) = \overline{(x_1, y_1)}(\overline{z}).$$

5. $(p), (\infty) \longmapsto [\infty], p \neq \infty$.

Sei $\langle U, V \rangle_\infty$ gegeben und $W_1 = [U_1, V_1]_p$, $W_2' = [U_2, V_2]_\infty$ mit $\overline{W_1 W_2'} \subset \langle U, V \rangle_\infty$. Sei $W_2 = [U_2, V_2 k \cap V_2] \subset W_2'$, wobei $V_2 k = \{xk : x \in V_2 \setminus \{\infty\}\} \cup \{\infty\}$. ($V_2 k$ ist wie V_2 eine Umgebung von ∞ .)

Ist nun $(x_2, y_2) \in W_2$ (d.h. $y_2 \in U_2$, $y_2 x_2^{-1} \in V_2 k \cap V_2$), so folgt $(kx_2, y_2) \in W_2'$, denn es gilt $y_2 (x_2^{-1} k^{-1}) \in V_2$. Ist weiter $(x_1, y_1) \in W_1$, so erhält man damit also

$$\begin{aligned} \overline{(x_1, y_1)(x_2, y_2)} &\in \langle U, V \rangle_\infty, \\ \overline{(x_1, y_1)(kx_2, y_2)} &\in \langle U, V \rangle_\infty. \end{aligned}$$

Wegen $x_1^\lambda = \infty$ gilt dann auch $(x_1, y_1)(x_2, y_2) \in \langle U, V \rangle_\infty$. Ebenso liegen für $(z_1) \in W_1$ die Geraden $\overline{(z_1)(x_2, y_2)}$ und $\overline{(z_1)(kx_2, y_2)}$ in $\langle U, V \rangle_\infty$ und damit auch $(z_1)(x_2, y_2)$.

Als letztes sei $(x_1, y_1) \in W_1$ und $(z) \in W_2$. Wegen $x_1^\lambda = \infty$ ist $z \circ x_1 = zx_1$ und damit $(x_1, y_1)(z) \in \langle U, V \rangle_\infty$.

Die Stetigkeit des Verbindens ist nun für alle möglichen Fälle nachgewiesen und E somit eine topologische Ebene. □

Satz 6.16. Die Topologie T der Ebene E über (C, λ) aus Satz 6.15. ist die Stellentopologie T_λ des durch λ auf E bestimmten Epimorphismus.

Beweis.

Es ist T feiner als T_λ nach Satz 2.12.. Die in 6.14. angegebene Umgebungsbasis von $T|C$ ist wegen Satz 2.11. in der Umgebungsbasis von $T_\lambda|C$ enthalten. Aus Lemma 2.13. ergibt sich damit auch, daß T_λ feiner als T ist. □

Mit Hilfe dieser Konstruktion erhält man also weitere Beispiele von Ebenen mit Epimorphismen, die in der Stellentopologie nicht diskrete topologische Ebenen sind. Insbesondere gibt es aber hier, anders als bei den Moultonenebenen, auch kompakte Stellentopologien.

Satz 6.17. *Sei (K, λ) ein lokalkompakter Schiefkörper, λ eine Stelle, die die Topologie von K erzeugt. Wird die Cartesische Gruppe C daraus wie in Definition 6.13. gebildet, so ist die zu C gehörige projektive Ebene E in der Stellentopologie eine kompakte topologische Ebene.*

Nach dem Bewiesenen stimmt nämlich die Stellentopologie von E mit der Topologie der desarguesschen Ebene über K überein. $\square$

7. Projektive Räume mit Homomorphismen

Die positiven Ergebnisse bei der Untersuchung der Stellentopologie desarguesscher projektiver Ebenen sowie die Tatsache, daß projektive Ebenen mit Stellentopologie immer topologische projektive Räume sind, legen es nahe, Epimorphismen projektiver Räume und davon erzeugte Topologien zu untersuchen. Wichtigste Grundlage für diese Untersuchung sind die Ergebnisse von Machala in [16]. Die dort ausgeführte Darstellung von Homomorphismen projektiver Räume durch verallgemeinerte semilineare Abbildungen entspricht der Darstellung von Epimorphismen projektiver Ebenen durch Stellen von Ternärkörpern. Analoge Überlegungen wie bei den Ebenen führen auch in projektiven Räumen zu einer Stellentopologie.

Homomorphismen und VSL-Abbildungen projektiver Räume

Zunächst sollen die Ergebnisse von Machala zitiert werden. Es seien V, V' Vektorräume über den Schiefkörpern K, K' . $\mathbb{P}(V)$ und $\mathbb{P}(V')$ seien die dazugehörigen projektiven Räume (mit eindimensionalen Unterräumen als Punkten) und $\mathbb{B}(V), \mathbb{B}(V')$ bezeichne die Punktmengen von $\mathbb{P}(V), \mathbb{P}(V')$. Ist $\dim V = n$, so seien die homogenen Koordinaten¹⁾ eines Punktes in $\mathbb{B}(V)$ mit $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$ bezeichnet.

Definition 7.1. (vgl. [16], Definition 3.) Die Abbildung

$$\kappa : \mathbb{B}(V) \longrightarrow \mathbb{B}(V')$$

heißt *Homomorphismus* der Räume $\mathbb{P}(V), \mathbb{P}(V')$, wenn sie die

¹⁾ Zum Begriff der homogenen Koordinaten siehe z.B. Hughes-Piper [13], Chap.II.

folgende Bedingungen erfüllt:

1. Sind $P, Q, R \in \mathbb{B}(V)$ kollinear, so auch P^K, Q^K, R^K .
2. Auf jeder Geraden von $\mathbb{P}(V)$ liegen drei Punkte mit paarweise verschiedenen Bildern.
3. Es gibt drei Punkte in $\mathbb{B}(V)$, deren Bilder nicht kollinear sind.

Dies ist eine etwas allgemeinere Definition als die von Radó in [23] gegebene. In Lenz [15], S.99 wird der Begriff des Homomorphismus nur durch 1. definiert. Erst die Einschränkung dieser Definition durch 2. und 3. erlaubt aber die Darstellung von Homomorphismen durch verallgemeinerte semilineare Abbildungen. Es kann dafür jedoch auf die Forderung der Surjektivität verzichtet werden, die im Falle projektiver Ebenen notwendig war.

Definition 7.2. (vgl. [16], Definition 2) Es seien V, V' Vektorräume über den Schiefkörpern K, K' ; A sei ein Bewertungsring von K mit Bewertungsideal M ; W sei ein A -Modul mit $W \subset V$. Das Abbildungspaar (λ, σ) , $\lambda : A \rightarrow K'$; $\sigma : W \rightarrow V'$ heißt *verallgemeinerte semilineare Abbildung (VSL-Abbildung)* wenn gilt:

1. $(x+y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma$ für alle $x, y \in W$.
2. $(ax)^\sigma = a^\lambda x^\sigma$ für alle $a \in A, x \in W$.
3. $a^\lambda = 0 \iff a \in M$.
4. In jedem Unterraum xK gibt es ein $y \in W$ mit $y^\sigma \neq 0$.
5. In jedem zweidimensionalen Unterraum von V gibt es Elemente $u, v \in W$, so daß u^σ, v^σ linear unabhängig in V' sind.
6. Es gibt $x, y, z \in W$, so daß $x^\sigma, y^\sigma, z^\sigma$ in V' linear unabhängig sind.

Folgerung 7.3. Die Abbildung λ aus Definition 7.2. ist ein Epimorphismus $\lambda: A \rightarrow \tilde{K}$, wobei $\tilde{K}$ ein Unterkörper von K' ist. λ kann also auch als Stelle von K aufgefaßt werden.

Beweis.

Nach [16], Satz 4 ist λ ein Homomorphismus, und wegen 7.2.3. ist der Kern von λ gleich M , also ist $\lambda(A) \cong A/M$ ein Körper. $\square$

Satz 7.4. (vgl. [16], Satz 5 und Theorem) Jede VSL-Abbildung induziert einen Homomorphismus κ der zugehörigen projektiven Räume durch die Vorschrift:

$$\begin{array}{ccc} \kappa: \mathbb{B}(V) & \longrightarrow & \mathbb{B}(V') \\ Kx & \longmapsto & K'x^\sigma \quad \text{für } x \in W. \end{array}$$

Jeder Homomorphismus projektiver Räume wird auf diese Weise durch eine VSL-Abbildung induziert. $\square$

Sei (λ, σ) eine VSL-Abbildung der projektiven Räume $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(V')$ und sei $\dim \mathbb{P}(V) = n < \infty$. Da λ eine Stelle von K ist, ist K mit der Stellentopologie T_λ ein topologischer Schiefkörper. V werde mit der Produkttopologie und $\mathbb{P}(V)$ mit der projektiven Koordinatentopologie¹⁾ versehen. So wird $\mathbb{P}(V)$ zu einem nicht diskreten topologischen Raum im Sinne der Definition 1.12.. Im nächsten Abschnitt wird diese Topologie genauer charakterisiert.

¹⁾ Siehe Lenz [15], S.338ff.

Die durch Homomorphismen induzierte Topologie

Es sei, wie in Definition 3.13., Γ die Gruppe der projektiven Kollineationen von $\mathbb{P}(V)$; für den Homomorphismus κ und für $\gamma \in \Gamma$ sei

$$U_\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{B}(V) \times \mathbb{B}(V) : x^{\gamma\kappa} = y^{\gamma\kappa}\}.$$

Die Mengen U_γ , $\gamma \in \Gamma$ bilden offensichtlich eine Subbasis einer uniformen Struktur U auf $\mathbb{P}(V)$.

Satz 7.5. *Sei $\kappa : \mathbb{B}(V) \longrightarrow \mathbb{B}(V')$ ein Homomorphismus der projektiven Räume $\mathbb{P}(V), \mathbb{P}(V')$. Sei $\dim V = n+1 < \infty$. Sei (λ, σ) eine VSL-Abbildung, die κ induziert, T die projektive Koordinatentopologie bezüglich der durch die Stelle λ auf dem Koordinatenkörper induzierten Stellentopologie. Dann gelten die beiden folgenden Aussagen:*

1. *T ist die grösste Topologie auf $\mathbb{B}(V)$, in der Urbilder von Punkten offen und Zentralprojektionen stetig sind.*
2. *Gibt es in $\mathbb{B}(V)$ $n+1$ nicht in einer Hyperebene liegende Punkte, deren Bilder nicht in einem $(n-1)$ -dimensionalen Unterraum von $\mathbb{P}(V')$ enthalten sind, dann ist T die durch die uniforme Struktur U erzeugte Topologie.*

Diese Ergebnisse stellen also eine Verallgemeinerung der Sätze 2.14. und 3.14. für desarguessche Ebenen dar. Auffallend ist, daß für den Homomorphismus κ nicht die Surjektivität vorausgesetzt werden muß. Wesentlich sind aber die Bedingungen 2. und 3. aus Definition 7.1., die im ebenen Fall schon die Surjektivität auf eine Unterebene von $\mathbb{P}(V')$ implizieren. Aus der zusätzlichen Voraussetzung in 7.5.2. folgt ebenfalls, daß κ schon als surjektiv angenommen werden kann. Es gibt Homo-

morphismen projektiver Räume, in denen die Voraussetzung des 2. Teils des Satzes verletzt ist. Siehe hierzu Fritsch und Prestel [9]. Dem Beweis des Satzes 7.5. muß noch ein einfaches Lemma vorausgestellt werden, das für desarguessche Ebenen den Zusammenhang zwischen homogenen Koordinaten und der üblichen Koordinatisierung projektiver Ebenen herstellt.

Lemma 7.6. *Die desarguessche projektive Ebene E , dargestellt durch homogene Koordinaten über dem Schiefkörper K , ist isomorph zu der projektiven Ebene F , die über dem Schiefkörper K als Ternärkörper gebildet wird, wie im ersten Kapitel ausgeführt. Ein Isomorphismus hat die Form:*

für Punkte:

$$\begin{aligned} \langle x, y, 1 \rangle &\longmapsto (x, y) \\ \langle 1, y, 0 \rangle &\longmapsto (y) \\ \langle 0, 1, 0 \rangle &\longmapsto (\infty) \end{aligned}$$

für Geraden:

$$\begin{aligned} \langle u, -1, v \rangle &\longmapsto [u, v] \\ \langle -1, 0, u \rangle &\longmapsto [u] \\ \langle 0, 0, 1 \rangle &\longmapsto [\infty] \end{aligned}$$

Dieser Isomorphismus wird mit ϕ_K bezeichnet.

Daß unter ϕ_K die Inzidenzbeziehungen erhalten bleiben, ist sofort nachzurechnen, wenn man beachtet, daß in der Ebene E $\langle x, y, z \rangle I \langle u, v, w \rangle$ genau dann gilt, wenn $ux + vy + wz = 0$ ist. $\square$

Nun zum Beweis des Satzes 7.5.: (λ, σ) ist die VSL-Abbildung, die κ beschreibt. Sei dabei $\lambda: K \rightarrow \tilde{K} \cup \{\infty\}$ die Stelle und $\sigma: W \rightarrow V'$. V und V' seien K - bzw. K' -Vektorräume. V trage die Produkttopologie der Stellentopologie T_λ von K (vgl. 3.8.), $\mathbb{P}(V)$ die projektive Koordinatentopologie T . Gezeigt wird zunächst der erste Teil des Satzes.

a) Es gilt: $\ker \sigma \subset W$ ist offen in V .

Sei dazu $x \in \ker \sigma$. Wegen 7.2.4. kann in V eine Basis $\{e_0, e_1, \dots, e_n\} \subset W$ gewählt werden. Sei

$$x = \sum_{i=0}^n k_i e_i, \quad k_i \in K, \quad e_i \in W.$$

Gesucht ist eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ in V mit $U^\sigma = \{0\}$.

Sei $U_i(k_i) = \{\zeta_i \in K : (\zeta_i - k_i)^\lambda = 0\}$, $U = \prod_{i=0}^n U_i(k_i)$ und

$\zeta = \sum_{i=0}^n \zeta_i e_i \in U$. Weil W ein A -Modul ist und weil $\zeta_i - k_i \in A$ ist,

folgt $\zeta - x = \sum_{i=0}^n (\zeta_i - k_i) e_i \in W$ und

$$(\zeta - x)^\sigma = \sum_{i=0}^n (\zeta_i - k_i)^\lambda e_i^\sigma = 0.$$

Es ist auch $\zeta = (\zeta - x) + x \in W$ und

$$\zeta^\sigma = (\zeta - x)^\sigma + x^\sigma = 0.$$

b) Urbilder von Punkten sind offen bezüglich T .

Sei dazu $p \in \mathbb{B}(V')$. Es kann $P^{K^{-1}} \neq \emptyset$ angenommen werden. Sei also

$$P = K'p^\sigma = (Kp)^K, \quad p \in W.$$

Es ist

$$P^{K^{-1}} = \{Kx : x \in W \setminus \{0\}, K'x^\sigma = K'p^\sigma\}.$$

Sei $Kx \in P^{K^{-1}}$, $x^\sigma \neq 0$. Die Menge $K(x + \ker \sigma)$ ist offen in $\mathbb{B}(V)$, denn $x + \ker \sigma$ ist offen in V (vgl. Lenz [15], S.338f.), und für $Ky \in K(x + \ker \sigma)$ gilt wegen $y^\sigma = x^\sigma$ auch $(Ky)^K = (Kx)^K$, also $K(x + \ker \sigma) \subset P^{K^{-1}}$.

c) T ist die grösste Topologie mit offenen Urbildern und stetigen Zentralprojektionen.

Nach [15], S.340, Satz 2.3. sind bezüglich T Zentralprojektionen stetig. Sei jetzt T' eine weitere Topologie mit diesen Eigenschaften. Wegen 7.1.3. ist $\dim \mathbb{P}(V) \geq 2$. Sei E eine beliebige Unterebene in $\mathbb{P}(V)$, koordinatisiert durch einen dreidimensionalen Vektorraum. $T|_E$ ist die projektive Koordinatentopologie. Sei F die zu E mittels ϕ_K isomorphe Ebene (vgl. Lemma 7.6.). F werde mit der Stellentopologie T_λ versehen. Auf dem Punktraum der affinen Ebene E ohne die Punkte der Geraden $\langle 0, 0, 1 \rangle$ ist T die Produkttopologie der Topologie von K ([15], S.339),

ebenso auf dem Punktraum der affinen Ebene F ohne die Punkte auf $[\infty]$. Wegen $\phi_K(\langle x, y, 1 \rangle) = (x, y)$ sind die affinen Ebenen also homöomorph. Da zentrale Kollineationen in beiden Ebenen Homöomorphismen sind (für E nach [15], S. 341), ist die Topologie der projektiven Ebenen durch die der affinen eindeutig bestimmt, es ist also E bezüglich ϕ_K homöomorph zu F . Nach 2.11. ist damit $T|_E$ die größte Topologie mit offenen Urbildern und stetigen Zentralprojektionen. Zentrale Projektionen auf E lassen sich als Einschränkung von zentralen Projektionen von $\mathbb{P}(V)$ auffassen, und so ist $T'|_E$ feiner als $T|_E$. Da E eine beliebige Ebene in $\mathbb{P}(V)$ war, gilt also auf jeder Geraden g von $\mathbb{P}(V)$, daß $T'|_g$ feiner als $T|_g$ ist. Auf jedem affinen Unterraum von $\mathbb{P}(V)$ ist T gleich der Produkttopologie und T' feiner als die Produkttopologie (Satz 1.13.). Da sich der projektive Raum durch endlich viele affine Räume überdecken läßt, ist damit T' auch auf $\mathbb{B}(V)$ feiner als T .

Zum zweiten Teil des Satzes.

Sind die Voraussetzungen erfüllt, so gibt es in V eine Basis $\{e_0, e_1, \dots, e_n\} \subset W$, so daß für $i = 0, \dots, n$ die Elemente $f_i = e_i^\sigma$ linear unabhängig sind. Sei $\tilde{V}$ der von $f_0, \dots, f_n$ aufgespannte Vektorraum über dem Körper $\tilde{K}$. Dann ist $\mathbb{P}(\tilde{V}) \subset \mathbb{P}(V')$, und

$$\kappa : \mathbb{B}(V) \longrightarrow \mathbb{B}(\tilde{V})$$

ist ein Epimorphismus. Das Bild einer Hyperebene von $\mathbb{P}(V)$ ist eine echte Teilmenge von $\mathbb{B}(\tilde{V})$. Daraus folgt insbesondere, daß es zu jeder Hyperebene $\mathbb{H}$ in $\mathbb{P}(V)$ einen Punkt $Z \in \mathbb{B}(V)$ gibt, so daß $Z^K \notin \mathbb{H}^K$ gilt.

Da zentrale Kollineationen in T stetig sind, überträgt sich nun der Beweis von Satz 3.14. wörtlich: Es genügt zu zeigen, daß in der von der uniformen Struktur U erzeugten Topologie Zentralprojektionen stetig sind. Im Beweis von 3.14. müssen dafür die Gerade g durch eine Hyperebene $\mathbb{H}$ und die zentralen Kollineationen α, β durch entsprechende Abbildungen des projektiven Raumes ersetzt werden. Im zweiten Beweisschritt geht dabei die Existenz des Punktes Z mit $Z^K \notin \mathbb{H}^K$ ein. $\square$

Kompakte projektive Räume

Nun können, wie bei den kompakten desarguesschen Ebenen, auch die endlich dimensional kompakten projektiven Räume charakterisiert werden. Zunächst gilt:

Satz 7.7. *Ein endlich dimensionaler kompakter topologischer projektiver Raum ist entweder zusammenhängend oder total unzusammenhängend.*

Beweis.

Ist der projektive Raum $\mathbb{P}(V)$ zusammenhängend, so auch der Koordinatenkörper K (Lenz [15], S.348f.). Ist K zusammenhängend, so läßt sich wegen 1.13. auf den Zusammenhang jedes affinen Teilraumes von $\mathbb{P}(V)$ und damit auf den Zusammenhang von $\mathbb{P}(V)$ schließen. Ist $\mathbb{P}(V)$ nicht zusammenhängend, so ist also der Koordinatenkörper total unzusammenhängend, und damit ein bewerteter Schiefkörper (nach Satz 6.10.). Für jedes $x \in K$ ist dann der Durchschnitt aller gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Umgebungen einpunktig. Dies gilt dann auch für den Punkt x in der Topologie von $\mathbb{P}(V)$, denn x ist im Inneren eines affinen Raumes enthalten und dieser Raum trägt die Produkttopologie von K . Die Zusammenhangskomponente von x ist in dem Durchschnitt aller gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Umgebungen enthalten; sie besteht also nur aus dem Punkt x . □

Satz 7.8. *Für einen endlich dimensional kompakten projektiven Raum $\mathbb{P}(V)$ gilt:*

1. *Ist $\mathbb{P}(V)$ zusammenhängend, so hat $\mathbb{P}(V)$ projektive Koordinatentopologie über den reellen oder komplexen Zahlen oder über dem Quaternionenkörper über $\mathbb{R}$.*

2. Ist $\mathbb{P}(V)$ unzusammenhängend, so hat $\mathbb{P}(V)$ die projektive Koordinatentopologie über einem lokalkompakten unzusammenhängenden Schiefkörper. Es gibt einen Epimorphismus $\kappa : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$, wobei $\mathbb{P}(V')$ ein endlicher projektiver Raum der gleichen Dimension wie $\mathbb{P}(V)$ ist. Die Topologie wird durch diesen Epimorphismus induziert: eine Subbasis offener Mengen sind Urbilder von Punkten und die daraus durch projektive Kollineationen entstehenden Mengen.

Beweis.

Zum ersten Teil des Satzes siehe Lenz [15], S.349. Zum zweiten Teil sei $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(K^{n+1})$, K der lokalkompakte Koordinatenschiefkörper. Nach [15], S.347 trägt $\mathbb{P}(V)$ die projektive Koordinatentopologie. Die Topologie von K ist nach Satz 6.10. durch eine Stelle $\lambda : K \rightarrow K' \cup \{\infty\}$ mit endlichem Körper K' gegeben. Die folgende Abbildung ist der gesuchte Epimorphismus:

$$\begin{aligned} \kappa : \mathbb{P}(K^{n+1}) &\longrightarrow \mathbb{P}(K'^{n+1}) \\ \langle x_0, \dots, x_n \rangle &\longmapsto \langle x_0^\lambda, \dots, x_n^\lambda \rangle, \end{aligned}$$

wobei o.B.d.A. $x_i^\lambda \neq \infty$ für $i = 0, \dots, n$ angenommen werden kann. κ erfüllt alle Voraussetzungen des Satzes 7.5., daher stimmt die durch κ erzeugte Topologie mit der gegebenen überein. $\square$

Literaturverzeichnis

- [1] André, J.: Über verallgemeinerte Moulton-Ebenen. Arch. Math. 13 (1962), 290-301.
- [2] André, J.: Bemerkung zu meiner Arbeit "Über verallgemeinerte Moulton-Ebenen". Arch. Math. 14 (1963), 359-360.
- [3] André, J.: Über Homomorphismen projektiver Ebenen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 34 (1969), 98-114.
- [4] Bartolone, C.: Le immagini epimorfe di un M-piano. Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli IV. Ser. 44 (1978), 53-67.
- [5] Bartolozzi, F.: Le immagini M-epimorfe di un M-piano. Ann. Mat. Pura Appl. 100 (1974), 307-325.
- [6] Bourbaki, N.: Topologie générale, Chap. 1 à 10, nouv. ed. Paris: Diffusion C.C.L.S. 1971.
- [7] Breitsprecher, S.: Uniforme projektive Ebenen. Math. Z. 95 (1967), 139-168.
- [8] Faulkner, J. R., Ferrar, J. C.: Homomorphisms of Moufang Planes and Alternative Places. Geo. Ded. 14 (1983), 215-223.
- [9] Fritsch, R., Prestel, A.: Bewertungsfortsetzungen und nicht injektive Kollineationen. Geo. Ded. 13 (1982), 107-111.
- [10] Grundhöfer, T.: Compact disconnected planes as inverse limits. Vortrag im Nato Advanced Study Institute "Rings and Geometry". Istanbul 1984.
- [11] Hähl, H.: Kriterien für lokalkompakte topologische Quasikörper. Arch. Math. 38 (1982), 273-279.

- [12] Heise, W., Sörensen, K.: Zur Definition topologischer projektiver Räume. Arch. Math. 21 (1970), 218-220.
- [13] Hughes, D. R., Piper, F. C.: Projective Planes. New York, Heidelberg, Berlin: Springer 1973.
- [14] Kowalsky, H. J.: Topologische Räume. Basel und Stuttgart: Birkhäuser 1961.
- [15] Lenz, H.: Vorlesungen über projektive Geometrie. Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft 1965.
- [16] Machala, F.: Homomorphismen von projektiven Räumen und verallgemeinerte semilineare Abbildungen. Časopis pro Pěstování matematiky 100 (1975), 142-154.
- [17] Mathiak, K.: Bewertungen nicht kommutativer Körper. J. Algebra 48 (1977), 217-235.
- [18] Mathiak, K.: Zur Bewertungstheorie nicht kommutativer Körper. J. Algebra 73 (1981), 586-600.
- [19] Mathiak, K.: Der Approximationssatz für Bewertungen nicht kommutativer Körper. J. Algebra 76 (1982), 280-295.
- [20] Panella, G.: Le immagini epimorfe di un M-piano archimedeo. Riv. Mat. Univ. Parma (3) 3 (1974), 189-200.
- [21] Pickert, G.: Projektive Ebenen, 2. Auflage. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1975.
- [22] Prieß-Crampe, S.: Angeordnete Strukturen: Gruppen, Körper, projektive Ebenen. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1983.
- [23] Radó, F.: Darstellung nicht-injektiver Kollineationen eines projektiven Raumes durch verallgemeinerte semilineare Abbildungen. Math. Z. 110 (1969), 153-170.

- [24] Radó, F.: Non Injective Collineations on Some Sets in Desarguesian Projective Planes and Extension of Non-Commutative Valuations. Aequat. Math. 4 (1970), 307-321.
- [25] Ribenboim, P.: Théorie des valuations. Montréal: Les Presses de l'Université de Montréal 1965.
- [26] Rink, R.: Eine Klasse topologischer Fastkörpererebenen. Vorabdruck.
- [27] Salzmann, H.: Topologische projektive Ebenen. Math. Z. 67 (1957), 436-466.
- [28] Salzmann, H.: Projectivities and the topology of lines. Geometry - von Staudt's Point of View. Dordrecht: Reidel 1981.
- [29] Schilling, O.F.G.: The Theory of Valuations. Providence, Rhode Island: AMS 1950.
- [30] Springer, T.A.: Quadratic forms over fields with discrete valuation. Indag. Math. 17 (1955), 352-362.
- [31] Warner, S.: Locally Compact Vector Spaces and Algebras over Discrete Fields. Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968), 463-493.
- [32] Weil, A.: Basic Number Theory. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1967.
- [33] Yaqub, J.C.D.S.: On Projective Planes of Class III. Arch. Math. 12 (1961). 146-150.

Verzeichnis der wichtigsten Begriffe

	Seite
Alternativkörper	10
angeordnete projektive Ebene	61
angeordneter Ternärkörper	61
Bewertung	17
Bewertungsring	18
Bewertungstopologie	19
Cartesische Gruppe	10
Epimorphismus einer projektiven Ebene	11
Fastkörper	10
Homomorphismus eines projektiven Raumes	119
kompakte Lenz-topologische Ebene	99
konvexes Viereck	62
Lenz-topologische Ebene	17
Loop	10
Moultonebene	75
ordnungstreuer Epimorphismus	64
ordnungstreue Stelle	64
Ordnungstopologie	62
Perspektivität	13
projektive Ebene	7
Projektivität	13
Quasikörper	10
Stelle eines Schiefkörpers	18
Stelle eines Ternärkörpers	12
Stellentopologie	28
Stellentopologie von Alternativ- und Schiefkörpern	46
Ternärkörper	9
topologische projektive Ebene	14
topologischer projektiver Raum	15
topologischer Ternärkörper	15
Trennbeziehung	60
verallgemeinerte semilineare Abbildung	120
Zentralprojektion	14

Symbolverzeichnis

	Seite
(P, G, I)	7
PIg	7
$\overset{*}{P}$	8
$(x, y), (z), [r, s], [x]$	9
T, T_1, T_2, T_3	9
$a \backslash b, b/a$	10
$U(x)$	14
K^*	17
$v_\gamma(x)$	19
$\Gamma(g), \Gamma_i(g), i = 0, \dots, 2$	22
$v_\sigma^g, v_\sigma^g(P), v_\sigma^P, v_\sigma^P(g)$	23
$v_\sigma, v_\sigma(P)$	23
U_g, U_P	23
T_g, T_P	24
$U_\sigma^Z(P), U_\sigma^Z(p)$	26
T_λ	28
$[a, b, c]$	40
${}_aV_b(x), {}_KV_K(x)$	46
$V_K(x), {}_KV(x), {}_KV_K(x), {}_K\underline{V}_K(x)$	47
U_γ, V_γ	56

	Seite
$PQ RS$	60
$(AB)_C$	61
$v_{Vh}^1(P)$	65
$v_{VhUg}^{(P)}$	65
$\tilde{v}_{Vh}$	71
U_{VU}	72
$K_{k,d}, K_k$	75
$[U,V]_p, \langle U,V \rangle_p$	82
$[U,V]_\infty, \langle U,V \rangle_\infty$	83
$K_{k,\lambda}$	110
$\mathbb{P}(V), \mathbb{B}(V)$	117
$\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$	117

Lebenslauf

9.1.1954	geboren in Weißenstadt, Kreis Wunsiedel.
1960 - 1964	Besuch der Volksschule Ludwigschule in Schweinfurt.
1964 - 1973	Besuch des Celtis-Gymnasiums in Schweinfurt.
1973	Ablegung der Reifeprüfung.
10.73 - 2.75	Ableistung des Grundwehrdienstes und des Zivildienstes.
SS 75 - SS 77	Studium der Mathematik (Nebenfach Physik) an der Universität Heidelberg.
Seit WS 77/78	Studium der Mathematik an der Universität München.
29.7.1981	Ablegung der Diplomprüfung in Mathematik.

